# III. Stetige Funktionen

## 1 Reelle Funktionen und Stetigkeit

### 1.1 Funktionen

Begriff der "Funktion" allmählich zu heutiger Bedeutung via

Leibniz "functio curvae": Eigenschaft einer Kurve, z.B. Länge, Fläche unter Kurve

Joh. Bernoulli

Euler Funktion "analytischer Ausdruck" einer Veränderlichen $x$

Lagrange (z.B. $a+x$, $\sin x$, $\ln x$, ...) $y = f(x)$

Bolzano $y = f(x)$ Funktion von $x$ auf einem Intervall:

Cauchy zu jedem $x$ ein eindeutig bestimmtes $y = f(x)$

Dirichlet, Hankel, ... (auf irgendeine Weise)

moderne Def. (Bourbaki 1939): Seien $A, B$ zwei Mengen.
Eine Relation zwischen $A$ und $B$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\}$.
Sie heißt Funktionsrelation von $A$ nach $B$, falls es zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ gibt, sodaß $(x,y)$ in dieser Relation ist.
Man nennt Funktion die Operation, die jedem Element $x \in A$ das Element $y \in B$ zuordnet, das sich in der Funktionsrelation zu $x$ befindet.

Bezeichnung: Funktion
$$f: A \to B$$
$$x \mapsto f(x) \quad \text{oder} \quad y = f(x)$$

$A$ heißt Definitionsbereich der Funktion $f$

$B$ " Wertbereich

$y$ Funktionswert von $x$ (oder Bild von $x$)

$x$ ein Urbild von $y$, $x$ Argument der Funktion $f$

für $X \subset A$ heißt $f(X) := \{y \in B \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$ Bild von X

für $Y \subset B$ $f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$ Urbild von Y

$f$ heißt <u>injektiv</u> $:\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 : \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

<u>surjektiv</u> $:\Longleftrightarrow f(A) = B$

$\Longleftrightarrow \forall y \in B\ \exists x \in A : \ y = f(x)$

$f$ <u>bijektiv</u> $:\Longleftrightarrow$ $f$ injektiv und surjektiv

$\Longleftrightarrow \forall y \in B \ \exists_1 x \in A : \ y = f(x)$

dann hat $f$ <u>Umkehrfunktion</u> $f^{-1}: B \to A$ :

für $y \in B$ ist $x = f^{-1}(y)$ ist das eindeutig bestimmte $x \in A$ mit $y = f(x)$

<u>Hintereinanderausführung</u> von $f: A \to B$, $g: B \to C$

def. $g \circ f : A \to C \ : x \mapsto g(f(x))$ (z. B.: $f^{-1} \circ f : A \to A : x \mapsto f^{-1}(f(x))$)

## <u>1.2 Reelle Funktionen</u>

$f: A \to B$ mit $A, B \subset \mathbb{R}$

oft $A$ <u>Intervall</u> der Form (mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall, oder

$[a,b]$ $\leq \ \leq$ abgeschlossenes I., oder

$(a,b] =$ $< \ \leq$, oder

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

o. ä. oder endliche Vereinigung von Intervallen

$B = \mathbb{R}$ oder $B$ Intervall

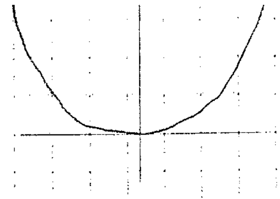
<u>Bsp</u>: 1) $f(x) = c \in \mathbb{R}$ konstante Funktion

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (weder injektiv noch surjektiv)

2) $f(x) = kx + d$, $\overset{\neq 0}{k}, d \in \mathbb{R}$, lineare Funktion (affi

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv $\quad y = kx + d \iff x = \frac{y-d}{k}$

3) $f(x) = x^2$



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv

$f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ injektiv: $0 \le x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2$

$f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv: injektiv ✓

<u>surjektiv</u> $\forall y \ge 0 \; \exists x \ge 0 : y = x^2$

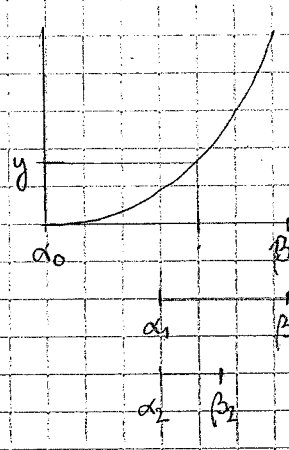
<u>Beweis:</u> Sei $y \ge 0$ gegeben, suchen $x \ge 0$ mit $x^2 = y$

<u>Konstruktion durch Bisektion</u> (wie in S.1, §1.3 von Bolzano über sup)

haben $0 \le y \le (1+y)^2$

setzen $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1+y$

$\gamma = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2}$




falls $\gamma^2 \le y$: setze $\alpha_1 = \gamma$, $\beta_1 = \beta_0$

$>$ : $\beta_1 = \gamma$, $\alpha_1 = \alpha_0$

erhalte $\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \beta_2 \le \beta_1 \le \beta_0$

$$\alpha_n^2 \le y \le \beta_n^2 \quad , \quad \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n} \to 0$$

Cauchy-Folgen, konvergieren gegen ein $x \ge 0$

$$x^2 = \lim_{n\to\infty} \alpha_n^2 \le y \le \lim_{n\to\infty} \beta_n^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y$$

(anders: wende S.1, §1.3 auf $X = \{x \ge 0 \mid x^2 \le y\}$ an, $\exists \xi = \sup X$, zeige $\xi^2 = y$

(noch anders: wende Zwischenwertsatz aus §3.4 unten an)

also: $\forall y \ge 0 \; \exists_1 x \ge 0 : y = x^2$, schreibe $\underline{x = \sqrt{y}}$

Bem: analog $\sqrt[m]{y}$ für bel. $m \in \mathbb{N}$ : $x = \sqrt[m]{y} \iff y = x^m$ $(x, y \ge 0)$

im vorigen Bsp. hatten auf $[0,\infty)$

| | | |
|---|---|---|
| $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ | <u>monoton wachsende Funktion</u> |
| $<$ | $<$ | streng — " — |

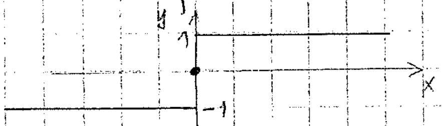
hingegen auf $(-\infty, 0]$:

$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ monoton fallend

$<$ $>$ streng — " —

Bsp: 4) $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & = \\ -1 & < \end{cases}$ Signum-Funktion

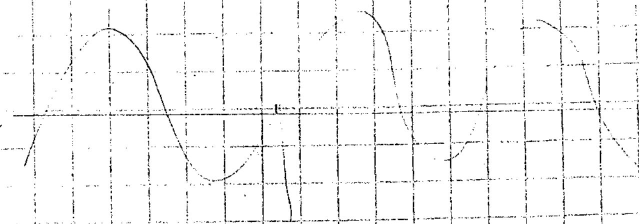
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



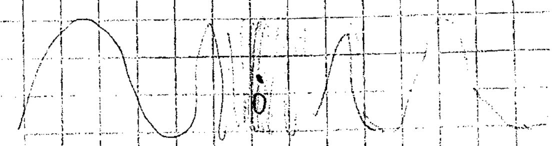

(monoton wachsend, nicht streng m.w.
weder injektiv noch surjektiv

5) $f(x) = \sin x$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

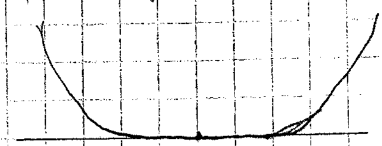


6) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



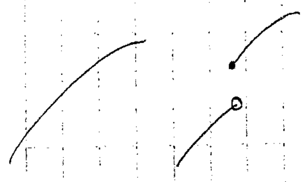
unendl. viele Oszillationen nahe 0, Amplitude 1

7) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



8) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ 1 & x \text{ rational} \end{cases}$ (Dirichlet 1829)

## 1.3 Stetige Funktionen (continuous functions)



Bolzano 1817, 1830, (Cauchy 1821):

Funktion $f$ stetig in $x_0$, falls Differenz der Funktionswerte $|f(x_0+\omega) - f(x_0)|$ kleiner als jede vorgegebene Größe wird, sofern $|\omega|$ genügend klein genommen wird

<u>Def</u>: Sei $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Eine Funktion $f: A \to \mathbb{R}$ heißt <u>stetig in $x_0$</u>:
$$\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in A, |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$
$f$ heißt <u>stetig</u>, falls $f$ in allen $x_0 \in A$ stetig ist

Bsp: 4), 6), 8) nicht stetig in 0

Hilfreich ist Folgenkriterium:

<u>Satz 1</u>: $f: A \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x_0 \in A$ (I)

$\Longleftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \in A$ $\forall n$ ist (II)
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \text{falls } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

<u>Beweis:</u> (I $\Rightarrow$ II) $f$ sei stetig in $x_0$. Sei $\varepsilon > 0$ bel.

nehme $\delta > 0$ aus Def. der Stetigkeit

Sei $(x_n)$ Folge, $x_n \in A$, $x_n \to x_0$

nach Def. der Konvergenz $\exists N \;\; \forall n \geq N : \; |x_n - x_0| < \delta$

wegen Stetigkeit: $\forall n \geq N : \; |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

nach Def. der Konvergenz $f(x_n) \to f(x_0)$

($\neg$ I $\Rightarrow$ $\neg$ II) Sei $f$ unstetig in $x_0 \in A$
$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall \delta > 0 \;\; \exists x \in A, |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

wähle hier $\delta = \frac{1}{n}$, zugehöriges $x$ nenne $x_n$:

habe $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $\quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

damit $x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$ $\square$

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c$ $\quad$ konstante Funktion

$\varepsilon > 0$, $\delta$ bel.

$f(x) = x$ $\qquad \delta = \varepsilon$

$f(x) = x^2$ stetig?

- mit $\varepsilon, \delta$: möglich, aber bereits mühsam
- mit Folgen (S.1): $x_n \to x_0$

  dann nach S.2, §1.1: $x_n x_n \to x_0 x_0$, d.h. $x_n^2 \to x_0^2$

allgemeiner erhalte aus S.2, $\overset{\text{II.}}{\S}$1.1 und S.1

<u>Satz 2</u>: Seien $f, g: A \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f+g$, $\alpha f$, $f \cdot g$ stetig in $x_0$

$f/g$ —"— , falls $g(x_0) \neq 0$

(hier $f+g: A \to \mathbb{R}$ def. durch $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, etc.)

<u>Beweis:</u> nach S.1: $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g($

nach S.2, §1.1: $f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0)$ usw. $\square$

<u>Bsp:</u> <u>Polynome</u> $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ stetig auf $\mathbb{R}$

<u>rationale Funktionen</u> $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ($P, Q$ Polynome)

stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$, falls $Q(x_0) \neq$

z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f: (0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig, bijektiv,

streng monoton fallend

Satz 3: $f: [a,b] \to [c,d]$ sei stetig und bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $f^{-1}$ auch stetig

Beweis: Sei $y_0 \in [c,d]$, Folge $(y_n)$ mit $y_n \in [c,d]$, $y_n \to y_0$

z.z.: $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$

$x_n := f^{-1}(y_n) \in [a,b]$, beschränkte Folge

nach Satz von Bolzano-Weierstraß: $(x_n)$ hat konv. Teilfolge $(x_n')$

setze $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} x_n'$, beachte $y_n' := f(x_n')$ Teilfolge von $(y_n)$

wegen $a \le x_n' \le b$ ist auch $a \le x_0 \le b$

$f$ stetig $\underset{S.1}{\Rightarrow}$ $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = \lim\limits_{n\to\infty} y_n' = y_0$

$\Rightarrow$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$

somit: jede konvergente Teilfolge von $(x_n)$ konvergiert gegen $x_0$,

d.h., $x_0$ ist einziger Häufungspunkt der beschr. Folge $(x_n)$

$\underset{\text{Ü}}{\Rightarrow}$ $x_n \to x_0$, d.h. $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0)$ $\square$

Bsp: $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$ $\quad f: [0,b] \to [0,b^m]$ bijektiv, stetig $\forall b > 0$

$f^{-1}(y) = \sqrt[m]{y} = y^{\frac{1}{m}}$ $\quad f^{-1}: [0,b^m] \to [0,b]$ stetig nach S.3 $\forall b > 0$

damit $f^{-1}: [0,\infty) \to [0,\infty)$ stetig

$f$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$ $f^{-1}$ streng monoton wachsend

Satz 4: $A, B \subset \mathbb{R}$, $f: A \to B$ stetig in $x_0 \in A$, $g: B \to \mathbb{R}$ stetig in $f(x_0)$

$\Rightarrow$ Hintereinanderausführung $g \circ f$ stetig in $x_0$

Beweis: Folge $x_n \to x_0$; $f$ stetig in $x_0$ $\Rightarrow$ $f(x_n) \to f(x_0)$

$g$ stetig in $f(x_0)$ $\Rightarrow$ $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$

Bsp: Potenzfunktion mit rationalem Exponenten

für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ist $f(x) = x^r = \sqrt[q]{x^p}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$

$f: (0,\infty) \to (0,\infty)$

Hintereinanderausführung der stetigen, streng monotonen, bijektiven Funktionen

$$(0,\infty) \longrightarrow (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$$

$$x \longmapsto x^p$$

$$y \longmapsto \sqrt[q]{y}$$

damit selbst stetig (S.4), streng monoton, bijektiv

Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}$

Bsp: Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$: $\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n}$

(a) exp stetig:

für $x_0 \in \mathbb{R}$, Folge $x_n \to x_0$ ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_n^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_0^j}{j!}$

nach Satz von dominierten Konvergenz (S.2, §3), denn für $|x_n - x_0| \leq 1$ i

$$\frac{|x_n^j|}{j!} \leq \frac{(|x_0|+1)^j}{j!} =: b_j, \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j \text{ konvergiert}, \quad \frac{x_n^j}{j!} \to \frac{x_0^j}{j!} \quad \forall j$$

(b) Für $r \in \mathbb{Q}$ ist $\exp(r) = e^r$ mit $e = \exp(1)$ (Euler' Zahl):

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}\cdot r} = \left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^r \quad \text{für } m = \frac{r}{n}, \text{ fall}$$

$n \to \infty \downarrow$

$$\exp(r) \qquad = \left(\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right)^{-r} \quad \text{für } m = \frac{-r}{n}, \text{ fall}$$

betrachte jene $n \in \mathbb{N}$, für die $m \in \mathbb{N}$ (Teilfolge)

Falls $r > 0$: $\Big(\underbrace{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{\to e}\Big)^r \longrightarrow e^r$ für $m \to \infty$

wegen Stetigkeit der Potenzfunktion $x \mapsto x^r$

Falls $r < 0$: $\Big(\underbrace{\left(1-\frac{1}{m}\right)^m}_{\to \exp(-1)}\Big)^{-r} \longrightarrow (\exp(-1))^{-r}$ für $m \to \infty$

haben $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ , denn für $m \to \infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \left(1-\frac{1}{m}\right)^m \to \exp(-1) \\ \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to e = \exp(1) \end{array}\right\} \quad \underbrace{\left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m}_{\downarrow \atop 1} = \left(1-\frac{1}{m}\right)^m \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \to \exp(-1)e$$

für $m \to \infty$

da nach Bernoulli Ungl. (Ü9) $\quad 1 - \frac{m}{m^2} \leq \left(1-\frac{1}{m^2}\right)^m \ (\leq 1)$

damit: $\quad \exp(r) = \begin{cases} e^r & r>0 \\ 1 & r=0 \\ (e^{-1})^{-r} & r<0 \end{cases} = e^r$ für $r \in \mathbb{Q}$

(c) $\underline{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}}$ ;

Seien $(x_n)$, $(y_n)$ Folgen in $\mathbb{Q}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}$, $y_n \to y \in \mathbb{R}$

$$\exp(x_n+y_n) \underset{(G)}{=} e^{x_n+y_n} = e^{x_n}e^{y_n} = \exp(x_n)\exp(y_n)$$

da exp stetig $\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$ stetig

$$\exp(x+y) \qquad\qquad\qquad\qquad \exp(x)\exp(y)$$

(d) $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ $\quad$ streng monoton wachsend:

Sei $x<y$, also $y = x+h$ mit $h>0$

$$\exp(y) = \exp(x+h) \underset{(c)}{=} \exp(x)\underbrace{\exp(h)}_{1+\underbrace{h}_{>0}+\underbrace{\sum_{j=2}^{\infty}\frac{h^j}{j!}}_{\geq 0} > 1} > \exp(x)$$

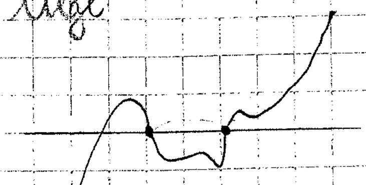
schreiben künftig $e^x := \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

Bsp: sin, cos stetig auf $\mathbb{R}$ (aus Reihe wie oben für exp)

## 1.4 Zwischenwertsatz und Satz vom Maximum und Minimum

zwei wichtige Sätze, die auf Bolzano' sup-Satz (S.1, §3) beruhen

Bolzano 1817 "Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel liege"



**Satz 1:** (Zwischenwertsatz)

Seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $c\in\mathbb{R}$ mit $f(a)<c<f(b)$

$\Rightarrow \quad \exists\, \xi\in(a,b) : \quad f(\xi)=c$

m.a.W.: $f$ nimmt jeden reellen Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.

**Beweis:** setze $X=\{x\in[a,b] \mid f(s)<c \quad \forall s\in[a,x]\}$

$X\neq\emptyset$ $(a\in X)$ und nach oben beschränkt (durch $b$)

$\Longrightarrow$ (sup-Satz) $\quad \exists\, \xi = \sup X$

$\forall x\in X: \ x\leq\xi \quad \Rightarrow \quad \xi+\varepsilon\notin X \quad \forall\varepsilon>0 \quad \Rightarrow \quad \exists s\in[a,\xi+\varepsilon]: f(s)\geq c$

$\forall\varepsilon>0 \ \exists x\in X: x>\xi-\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \xi-\varepsilon\in X \quad \forall\varepsilon>0 \quad \Rightarrow \quad f(\xi-\varepsilon)<c \quad \forall\varepsilon$

damit $\quad f(\xi-\frac{1}{n})<c\leq f(s_n) \quad$ mit $\quad \xi-\frac{1}{n}<s_n\leq\xi+\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \quad f(\xi) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig, S.1}}}{=} \lim_{n\to\infty} f(\xi-\tfrac{1}{n}) \leq c \leq \lim_{n\to\infty} f(s_n) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig}}}{=} f(\lim_{n\to\infty} s_n) = f$$

somit $\quad f(\xi)=c$ $\quad \square$

**Bsp:** $\exp: [-N,N]\to[e^{-N},e^{N}]$ ist nach S.1 surjektiv $\forall$

somit $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ surjektiv

auch injektiv, da streng monoton wachsend

$\Big\}$ bijektiv

Umkehrfunktion $\ln:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

streng monoton wachsend, stetig

$y=e^{x} \iff x=\ln y$

allg. Potenzfunktion $a\in$ $\neq 0$

$f:(0,\infty)\to(0,\infty)$

$x\mapsto x^{a}:=e^{a\ln x}$

stetig, bijektiv, streng monot

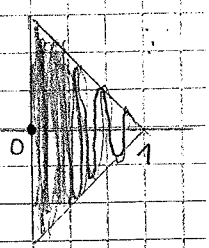
Satz 2: (Satz vom Maximum und Minimum, Weierstraß 1861 "Hauptlehrsatz")
Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt in $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum an, d.h. es gibt $x^*, x_* \in [a,b]$ mit
$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a,b].$$

Bem: $[a,b]$ abgeschlossenes, beschränktes Intervall: wichtig!
ansonsten nicht richtig, Gegenbsp:

$f : (0,1] \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \frac{1}{x}$

$f : [0,\infty) \to \mathbb{R} : \quad f(x) = x$ nicht beschränkt

$f : [0,1] \to \mathbb{R} : \quad f(x) = \begin{cases} (1-x)\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$




nicht stetig in 0, aber beschränkt
$\sup\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = 1$, aber $\nexists\, x \in [0,1] : f(x) = 1$

Beweis: (a) zeigen erst: $f$ beschränkt
indirekt: Annahme $\quad \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n$
$(x_n)$ beschränkt, hat nach S. v. Bolzano-Weierstraß (§ 1.4) konvergente Teilfolge $(x_n')$, mit Grenzwert $x_0 \in [a,b]$
wegen Stetigkeit $\quad f(x_n') \to f(x_0)$, Wspr. zu Annahme

(b) setze $Y = \{f(x) \mid x \in [a,b]\} \neq \emptyset$, beschränkt nach (a)
nach sup-Satz existiert $\eta = \sup Y$, d.h.
$\forall y \in Y : y \leq \eta$
$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in Y : y_n > \eta - \frac{1}{n} \qquad y_n = f(x_n)$ für ein $x_n \in [a,b]$
nach Bolzano-Weierstraß hat $(x_n)$ konvergente Teilfolge $(x_n')$,
mit Grenzwert $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n' \in [a,b]$
haben $\qquad f(x_n') \leq \eta < f(x_n') + \frac{1}{n} \qquad \forall n$

$f$ stetig : $f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n') \leq \eta \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n') + \frac{1}{n} = f(\xi)$

somit $f(\xi) = \eta$ und $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq \eta = f(\xi)$ Maximum

(c) Minimum von $f$ = −Maximum von $-f$ $\square$

<u>Bez</u>: $f : A \to \mathbb{R}$ bel. Funktion

schreibe $\sup_{x\in A} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$ (falls ex., $\infty$ sonst)

$\max_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A} f(x)$, falls $f$ Maximum annimmt

d.h. $\exists \xi \in A : f(\xi) = \sup_{x\in A} f(x)$

## 1.5 Grenzwert einer Funktion

Bsp: $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} : f(x) = e^{-1/x^2}$ stetig

Ist $f$ zu stetiger Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar?

<u>Def</u>: $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> einer Menge $A \subset \mathbb{R}$, falls

$\forall \delta > 0 \quad \exists x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta$

Bem (Ü): $x_0$ HP von $A$ $\iff$ $\exists$ Folge $(x_n)$ mit $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, sodaß $x_n \to x_0$

Bsp: • $0$ HP von $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

• $x_0$ HP von $(a,b)$ $\iff$ $x_0 \in [a,b]$

• jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist HP von $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, s. §1.2)

• $x_0$ HP einer reellen Folge $(s_n)$ $\iff$ $x_0$ HP der Menge $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$
mit $s_n = s_m$ nur für endl. viele Paare $(n,m)$ aber: $(1,-1,1,-1,\ldots)$ vs. $\{1,-1\}$

im folgenden sei $A \subset \mathbb{R}$, $x_0$ HP von $A$, $f : A \to \mathbb{R}$ (bel. Funktion)

<u>Def</u>: $f$ hat in $x_0$ den <u>Grenzwert</u> $y_0$, falls

(*) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta : \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon$

schreibe dann: $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ oder: $f(x) \to y_0$ für $x \to x_0$

HS: Äquivalente Bedingungen sind:

(i) Es gilt (*)

(ii) Die Funktion $F: A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, x \neq x_0 \\ y_0 & \text{falls } x = x_0 \end{cases}$ ist stetig in $x_0$

(iii) Für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$, für die $x_n \to x_0$, gilt $f(x_n) \to y_0$

Beweis: (i) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Def. Stetigkeit}}}{\Longleftrightarrow}$ (ii) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Folgenkrit.} \\ \text{S.1, §3.3}}}{\Longleftrightarrow}$ (iii) □

Bsp: • $\lim\limits_{x \to 0} e^{-1/x^2} = 0$, denn: für $x \neq 0$ und $0 < \varepsilon < 1$ ist

$$e^{-\frac{1}{x^2}} < \varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \text{exp streng monoton}}}{\Longleftrightarrow} -\frac{1}{x^2} < \ln \varepsilon \Longleftrightarrow x^2 < \underbrace{-\frac{1}{\ln\varepsilon}}_{>0} \Longleftrightarrow |x| < \underbrace{\sqrt{-\frac{1}{\ln\varepsilon}}}_{=:\delta}$$

• $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ existiert nicht. (ü)

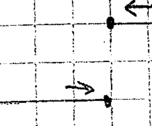
• $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^m - x_0^m}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x^{m-1} + x^{m-2}x_0 + x^{m-3}x_0^2 + \dots + x_0^{m-1})}{\cancel{x-x_0}} \overset{(ii)}{=} m x_0^{m-1}$

$(m \in \mathbb{N})$

Def: $f$ hat in $x_0$ den linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert $y_0$, falls (*) mit der weiteren Einschränkung $x < x_0$ (bzw. $x > x_0$) gilt.

schreibe dann: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x_0) = y_0$ bzw. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x_0) = y_0$

Bsp: $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = +1$



schreibe $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$, falls

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N\geq 1 \quad \forall x\in A,\ x\geq N \ : \ |f(x)-y_0|<\varepsilon$$

analog $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (dort $\forall x\in A,\ x\leq -N$)

Bsp: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^k}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^{-k}} = 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$

da $0 \leq \dfrac{x^k}{e^x} = \dfrac{x^k}{\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{x^j}{j!}} \leq \dfrac{x^k}{\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!}} = \dfrac{(k+1)!}{x} < \varepsilon$

für $x > \dfrac{(k+1)!}{\varepsilon}$

exp wächst für $x\to+\infty$ schneller gegen $\infty$ als jede pos. Potenz von $x$
fällt $\quad -\infty \quad 0 \quad$ neg.

Bem: $\lim\limits_{x\to\underset{-}{+}\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to \underset{-}{0+}} f\left(\frac{1}{t}\right)$ direkt aus Def. $\left(\delta=\frac{1}{N}\right)$

## 2 Gleichmäßige Konvergenz, gleichmäßige Stetigkeit

Begriffe von Weierstraß und Umkreis, schließen Lücken in Cauchy's Cours d'Analyse betreffend

- Grenzfunktion von Folgen stetiger Funktionen
- Integrierbarkeit stetiger Funktionen

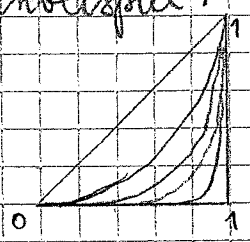
### 2.1 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -reihen

betrachten Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ existiere für jedes $x \in A$ (punktweise Konv.)

Frage: Falls alle $f_n$ stetig, ist Grenzfunktion $f : A \to \mathbb{R}$ auch stetig?
(so behauptet von Cauchy)

Gegenbeispiel: $A = [0,1]$ $\quad f_n(x) = x^n \qquad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$




unstetig in 1

(Schwierigkeit: $x^n \to 0$ beliebig langsam, falls $x$ nahe 1)

**Def:** Die Funktionenfolge $f_n : A \to \mathbb{R}$ konvergiert gleichmäßig auf $A$ gegen $f : A \to \mathbb{R}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \ge 1 \quad \forall n \ge N \quad \forall x \in A : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

wichtig: $N$ kann unabhängig von $x \in A$ gewählt werden.

äquivalente Bed.: $\quad \sup\limits_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad$ für $n \to \infty$

(unmittelbar aus Definitionen)

Satz 1: Es sei $f_n : A \to \mathbb{R}$ stetig $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ glm auf.
$\Rightarrow$ $f : A \to \mathbb{R}$ stetig

Beweis: Sei $x_0 \in A$, $x \in A$. Sei $\varepsilon > 0$ bel.
haben $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$

da $f_n \to f$ glm: $\exists n \; \forall x \in A : |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
da $f_n$ stetig: $\exists \delta \; \forall x \in A, |x - x_0| < \delta : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

damit für $|x - x_0| < \delta$ : $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$
somit $f$ stetig $\square$

bei unbekannter Grenzfunktion ist Analogon des Cauchy' Konvergenzkriteriums nützlich:

Satz 2: Es gibt eine Grenzfunktion $f : A \to \mathbb{R}$, gegen die die Funktionenfolge $f_n : A \to \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert, falls
$(*)$ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 1 \; \forall n \geq N \; \forall k \geq 1 \; \forall x \in A : |f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon$

Beweis: $(f_n(x))$ ist reelle Cauchy-Folge $\forall x \in A$, also konvergent nach Cauchy' Konvergenzkriterium,
setze $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

zu geg. $\varepsilon > 0$ sei $N \geq 1$ von $(*)$, $n \geq N$ bel., haben
$\forall k \geq 1 \; \forall x \in A : |f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon$
lasse $k \to \infty$, erhalte $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon \quad \forall x \in A$
somit $f_n \to f$ glm. $\square$

<u>Funktionenreihe</u> $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ heißt <u>glm. konvergent</u> auf A,

falls Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{j=0}^{n} f_j \quad (n \in \mathbb{N})$
glm konvergent auf A.

<u>Satz 3:</u> (<u>Weierstraß' Majorantenkriterium</u>)
Seien $f_j : A \to \mathbb{R} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$ Funktionen mit

$$|f_j(x)| \leq b_j \quad \forall x \in A, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0,$$

und majorante Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ sei konvergent. Dann ist die
Funktionenreihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ auf A glm. konvergent.

<u>Beweis:</u> zeigen: Kriterium von S.2 ist erfüllt für $(s_n)$

$$\forall x \in A: \quad |s_{n+k}(x) - s_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+k}(x)|$$
$$\leq |f_{n+1}(x)| + \dots + |f_{n+k}(x)|$$
$$\leq b_{n+1} + \dots + b_{n+k}$$

da Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiert und alle $b_j \geq 0$, gibt es zu bel. $\varepsilon > 0$
ein $N \geq 1$, sodaß $\forall n \geq N, \forall k \geq 1$:
$b_{n+1} + \dots + b_{n+k} < \varepsilon$

nach S.2: $(s_n)$ konvergiert glm $\square$

<u>Bsp:</u> noch einmal $\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$

$$f_j(x) = \frac{x^j}{j!}, \quad \text{haben} \quad \left|\frac{x^j}{j!}\right| \leq \frac{M^j}{j!} \quad \text{für } |x| \leq M$$

nach S.3: exp-Reihe konvergiert glm auf $[-M, M]$ für bel

(daraus von neuem: exp stetig in jedem $x_0 \in [-M, M]$ für bel. M
aus S.1
$\Rightarrow \exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ stetig )

aber: exp-Reihe konvergiert <u>nicht</u> glm auf $\mathbb{R}$, denn $\left|\frac{x^j}{j!}\right| \to \infty$ für $|x| \to \infty$
damit Krit. von S.2 für k=1 nicht erfüllt

Bsp: $$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j-1}}{j!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$$

$$\frac{|x^k|}{(k+1)!} \leq \frac{M^k}{(k+1)!} \quad \text{für } |x| \leq M \quad \text{konv. Majorante}$$

$\Rightarrow$ Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}$ konv. glm. auf $[-M, M]$, dort stetig nach S.1

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = 1$$

Bsp: Fourier-Reihen (nach J. B. Fourier um 1820)

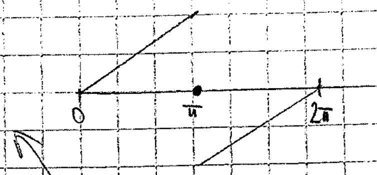
$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx) \quad , \quad \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sin(jx) \qquad (\text{mit } a_j, b_j \in \mathbb{R})$$

sind glm. konvergent auf $\mathbb{R}$ (und somit stetig nach S.1), falls die Reihen $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$, $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$ konvergieren

(nach S.3, da $|a_j \cos(jx)| \leq |a_j|$ , $|b_j \sin(jx)| \leq |b_j|$ )

aber: Bsp. von Abel (1826) (als Gegenbsp. zu Cauchy's "Theorem").

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} \sin(jx) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x < \pi \\ 0 & x = \pi \\ \frac{x}{2} - \pi & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$




unstetig in $\pi$ (Beweis später)

beachte: $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ divergiert

Bem: aus S.1 und S.3, falls $f_j$ stetig und wie in S.3:

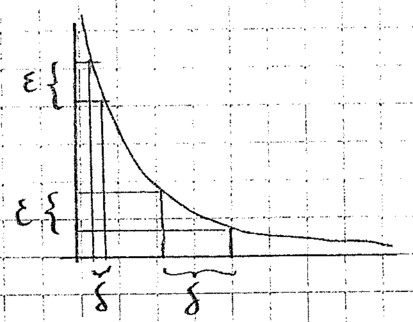
$$\lim_{x \to x_0} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) \underset{\substack{S.1 \\ S.3}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_j(x)$$

vgl. S.2, §2.3 (dominierte Konvergenz)

## 2.2 Gleichmäßige Stetigkeit

$f: A \to \mathbb{R}$ stetig $\iff$ $\forall x_0 \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A, |x - x_0| < \delta :$
$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\delta$ kann hier von $x_0$ abhängen, z.B.: $f(x) = \frac{1}{x}$, $A = (0,1]$




($\delta \to 0$ für $x_0 \to 0$)

**Def:** $f: A \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig auf $A$, falls
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x_0, x \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

($\delta$ kann unabhängig von $x_0$ gewählt werden)

Klassen glm. stetiger Funktionen:

- Lipschitz-stetige Funktionen: $f: A \to \mathbb{R}$ mit

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in A$$

für ein $L \in \mathbb{R}$ (Lipschitz-Konstante)

hier: $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$

z.B.: $f(x) = |x|$ $\quad A = \mathbb{R}$ $\quad L = 1$ $\quad$ ($\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$ mod. Δ-Ungl.)

$f(x) = \sin x$ $\quad A = \mathbb{R}$ $\quad L = 1$ $\quad$ (Ü, aus Additionstheorem)

- Hölder-stetige Funktionen

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y|^{\alpha} \quad \forall x, y \in A$$

für ein $L \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$

hier: $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{1/\alpha}$

z.B.: $f(x) = \sqrt{x}$, $A = [0, \infty)$, $L = 1$ (Ü)
$\alpha = \frac{1}{2}$

Es gilt sogar

**Satz:** (Heine 1872) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist glm stetig.

(wichtig: $[a,b]$ abgeschlossenes, beschränktes Intervall!)

**Beweis:** indirekt: $f$ nicht glm stetig, dann mit $A = [a,b]$:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in A, \ |x-y| < \delta : \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

bzw. mit $\delta = \frac{1}{n}$

$$(*) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in A, \ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} : \ |f(x_n) - f(y_n)| \geq$$

Bolzano-Weierstraß: $(x_n)$ hat konv. Teilfolge $(x_n')$

$$x_n' = x_{\sigma(n)} \quad \text{mit } \sigma(1) < \sigma(2) < \ldots, \quad \text{setze } y_n' = y_{\sigma(n)}$$

wegen $|x_n' - y_n'| < \frac{1}{\sigma(n)} \leq \frac{1}{n}$ ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} y_n' =: x_0$$

da $f$ stetig: $\lim_{n\to\infty} f(x_n') = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(y_n')$

im Wspr. zu $(*)$ $\square$

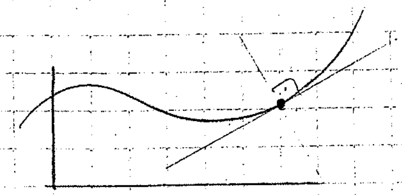
# IV. Differentiation, Integration, Reihenentwicklungen von Funktionen

Ziele dieses Kapitels: • "Calculus" von Newton, Leibniz, Joh. und Jac. Bernoulli, Euler kennenlernen und damit umgehen

• mathematisch strenge Fundierung (im Sinne des 19. Jh.)

## 1. Differentiation von Funktionen

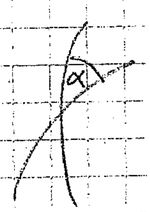
### 1.0 Vorbemerkungen



Problem: Sei $y = f(x)$ gegebene Kurve

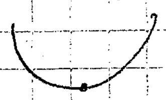
möchte in jedem Punkt die Steigung, die Tangente oder die Normale an die Kurve bestimmen

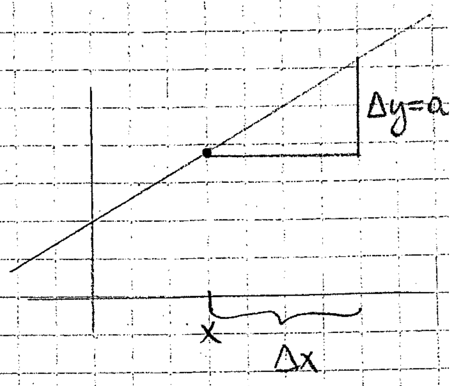
Lösung erforderlich bei



- Berechnung der Schnittwinkel zweier Kurven (Descartes)
- Bestimmung von Maxima und Minima (Fermat)
- Geschwindigkeit, Beschleunigung (Galilei, Newton)

⋮







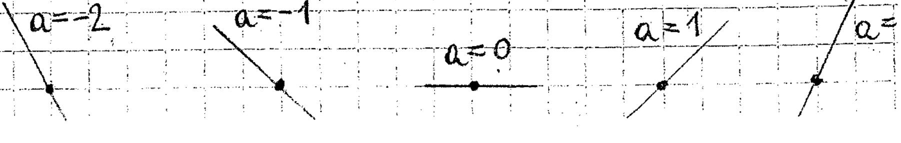
lineare Funktion $\quad y = ax + b$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Stelle } x: & y = ax + b \\ \text{Stelle } x+\Delta x: & y + \Delta y = a(x+\Delta x) + b \end{array}\right\}$$

$$\Delta y = a\,\Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \qquad \text{Steigung}$$

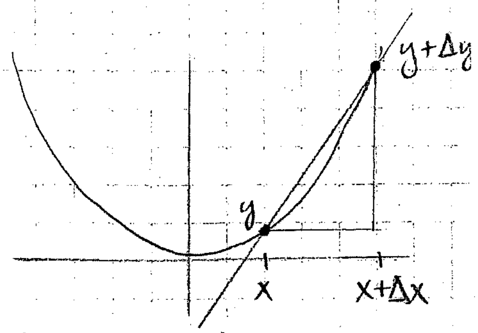
Bsp: $y = ax$



## Parabel $y = x^2$

$x$ : $y = x^2$

$x+\Delta x$ : $y + \Delta y = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$




$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

Steigung der Geraden durch $(x,y)$ und $(x+\Delta x, y+\Delta y)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

für $\Delta x \to 0$ erhalte Steigung der Tangente in $(x,y)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2x \qquad \text{für} \quad \Delta x \to 0$$

## Notation:

Leibniz (1684) $\frac{dy}{dx} = 2x$

($dy$, $dx$ "unendlich kleine" Größen $dy = 2x\,dx$ )

Newton (1671) $\dot{y}$ ( Fluxion = Geschwindigk

Lagrange (1797) "fonction dérivée" = abgeleitete Funk

Ableitung, engl. deriv

$y'$ bzw. $f'(x)$

(für $y = f(x)$ )

Auffassung als <u>Grenzwert</u> allmählich seit Mitte 18. Jh. (d'Alembert)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{dy}{dx} \quad \text{für } \Delta x \to 0$$

Cauchy (1821) : $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

"Limes" = Grenzwert

Perfektionierung des Grenzwertbegriffs durch Bolzano und Weierstraß im 19. Jh. (s. Kap. III)