II. Folgen und Reihen reeller Zahlen

0. Vorbemerkungen: Zahlen, Notation

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$+ , \cdot$

$<$ (als bekannt vorausgesetzt)

$\mathbb{Q} = \{ x \mid x = \frac{m}{n} \text{ mit } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \}$ Menge der rationalen Zahlen

("Menge aller x, für die gilt") "Element von"

$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ falls $mq = pn$

$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$, $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$ | $-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n}$

$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ falls $mq < pn$ | $\left(\frac{m}{n}\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{n}{m} & \text{falls } m \\ \frac{-n}{-m} & m \end{cases}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mittels $m = \frac{m}{1}$

("Teilmenge von")

Rechenregeln in $\mathbb{Q}$: Körperstruktur Für $K = \mathbb{Q}$ mit $+, \cdot$ gi

- Kommutativität: $\forall a, b \in K : \quad a + b = b + a, \quad ab = $

  "für alle a, b in"

- Assoziativität: $\forall a, b, c \in K : \quad (a+b) + c = a + (b+c)$

  $(ab)c = a(bc)$

- Distributivität: $\forall a, b, c \in K : \quad a(b+c) = ab + ac$

- Durchführbarkeit von Subtraktion und Division:

$\forall a, b \in K : \exists x \in K : a + x = b$ $\quad \forall a, b \in K, a \neq 0 : \exists x \in K : ax =$

"es gibt", hier sogar: $\exists_1 x \in K$ ("es gibt genau ein

Ordnungsstruktur auf $\mathbb{Q}$: ("aus ... folgt ...")

$<$ ist Ordnung: $a<b$ und $b<c \Longrightarrow a<c$

$<$ ist vollständige Ordnung: falls $a \neq b$, so ist entweder $a<b$ oder $b<a$.

$<$ ist verträglich mit Addition und Multiplikation:

$$a \underset{\le}{<} b, \; c \underset{\le}{<} d \Longrightarrow a+c \underset{\le}{<} b+d$$

$$ac \underset{\le}{<} bd, \quad \text{falls } 0 \underset{\le}{<} c \; (\underset{\le}{<} d)$$

(schreiben $a \le b$, falls $a<b$ oder $a=b$)

Absolutbetrag: $|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \quad (\text{d.h. } 0 \le a) \\ -a & a<0 \end{cases}$

Es gilt:

(1) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(2) $|a+b| \le |a| + |b|$ (Dreiecksungleichung)

(3) $\big||a|-|b|\big| \le |a-b|$

Beweis von (2): $a \le |a|$, $b \le |b| \Longrightarrow a+b \le |a|+|b|$

$-a \le |a|$, $-b \le |b| \Longrightarrow -(a+b) \le |a|+|b|$

$\Longrightarrow |a+b| \le |a|+|b|$

(Beweis von (1), (3): Ü)

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen (rationale und irrationale Zahlen s.u.)

($\mathbb{C}$ = Menge der komplexen Zahlen =

$= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$

$(a,b) = a+ib \qquad i^2 = -1$

$|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$)

1 Folgen und reelle Zahlen

(rationale oder reelle)

Wird jeder natürlichen Zahl n eine Zahl s_n zugeordnet, spricht man von einer Folge.

Bez.: $(s_n) = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (s_n)_{n=1}^{\infty} = (s_1, s_2, s_3, \dots)$

(oft auch $\{s_n\}$ in Literatur)

s_n heißt n-tes Folgenglied (oder -term)

Bsp: $(q^0, q^1, q^2, q^3, \dots)$ geometrische Folge: $\frac{s_{n+1}}{s_n}$ unabh. von n

1.1 Konvergenz einer Folge

s heißt Grenzwert der Folge (s_n), falls s_n beliebig nahe an s für alle genügend großen n, genauer:

"beliebig nahe" heißt "näher als jede positive Zahl ε",

d.h. $|s_n - s| < \varepsilon$

"für alle genügend großen n" heißt: "Es gibt ein N, sodaß für alle $n \geq N$ ..."

definieren in diesem Sinn nach Gregory St. Vincent (1647), ..., Cauchy (1

Def: Eine Folge (s_n) konvergiert, falls es eine Zahl s gibt, so

(*) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N : \quad |s_n - s| < \varepsilon$

s heißt dann Grenzwert der konvergenten Folge (s_n), schrei

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad \text{oder} \qquad s_n \to s .$$

Die Folge (s_n) divergiert, falls sie nicht konvergiert.

Bsp: $(s_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right)$ mit $s_n = \frac{n}{n+1}$

konvergiert gegen 1, denn

$$|s_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$$

zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ist $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, falls $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

nehmen N (abhängig von ε) als ganze Zahl mit $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, damit $(*)$ erfüllt.

Satz 1: Falls eine Folge (s_n) konvergiert, ist sie beschränkt, d.h.

$$\exists B > 0 \quad \forall n \geq 1 : \quad |s_n| \leq B$$

Beweis: nehme $\varepsilon = 1$

nach Def. der Konvergenz $\quad \exists N \quad \forall n \geq N : \quad |s_n - s| < 1$

damit für $n \geq N$:

$$|s_n| = |s_n - s + s| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecks-Ungl.}}}{\leq} |s_n - s| + |s| < 1 + |s|$$

erhalte Beh. mit $B = \max\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{N-1}|, 1 + |s|\}$.

Nicht jede beschränkte Folge konvergiert, Gegenbsp: $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \underset{-}{+}\infty$ oder $s_n \to \underset{-}{+}\infty$, falls

$$\forall M \underset{<}{>} 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N : \quad s_n \underset{<}{>} M$$

Bsp: arithmet. Folge $(d, 2d, 3d, 4d, \dots)$ mit $s_n = nd$

$$s_n \to \underset{-\infty}{+\infty} \quad \text{falls } d \underset{<}{>} 0$$

HS: Für die geometrische Folge $(q^0, q^1, q^2, \dots)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } |q|<1 \\ 1 & q=1 \\ +\infty & q>1 \end{cases}$$

Die Folge divergiert für $q \leq -1$ und $q>1$.

Beweis: (a) falls $q>1$, schreibe $q = 1+r$ mit $r>0$,
nach binom. Lehrsatz

$$q^n = (1+r)^n = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2} r^2 + \dots + r^n \geq 1 + nr$$

für geg. M wähle $N \geq M/r$, damit für $n \geq N$:

$$q^n \geq 1 + nr \geq 1 + Nr \geq 1 + M > M$$

somit $q^n \to +\infty$

(b) $q = 1, 0$: klar

(c) $0<|q|<1$: betrachte Folge $s_n = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n \to +\infty$ nach (a)

zu geg. $\varepsilon > 0$ setze $M = \frac{1}{\varepsilon}$, wissen:

$$\exists N \ \forall n \geq N: \ \underbrace{s_n > M}$$

$$\text{d.h. } \left(\frac{1}{|q|}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{d.h. } \underset{\substack{\| \\ |q^n| = |q^n - 0|}}{|q|^n} < \varepsilon$$

somit $q^n \to 0$

(d) $q=-1$: $(1, -1, 1, -1, \dots)$

(e) $q<-1$: Folge unbeschränkt, alternierendes Vorzeichen $\square$

hilfreich für Berechnung von Grenzwerten:

Satz 2: Seien (s_n), (v_n) konvergente Folgen mit $s_n \to s$, $v_n \to v$
$\Rightarrow$ Summenfolge $(s_n + v_n)$ und Produktfolge $(s_n v_n)$ sind konvergent

$$s_n + v_n \to s + v, \quad s_n v_n \to sv$$

Falls $v_n \neq 0 \ \forall n$ und $v \neq 0$, so ist auch $\left(\frac{s_n}{v_n}\right)$ konvergent mit $\frac{s_n}{v_n} \to$

Beweis: (a) Summe:

$$|(s_n+v_n)-(s+v)| = |s_n-s+v_n-v| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{|s_n-s|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|v_n-v|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = \varepsilon$$

für logisch korrekten Beweis beginne von rechts: zu beliebig gegebenem $\varepsilon' > 0$ wähle $\varepsilon > 0$, sodaß $2\varepsilon = \varepsilon'$.

Nach VS $s_n \to s$ und $v_n \to v$

$\exists N_1 \quad \forall n \geq N_1 \quad |s_n - s| < \varepsilon$

$\exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad |v_n - v| < \varepsilon$

setze $N = \max\{N_1, N_2\}$, damit habe nach obiger Ungl.

$$\forall n \geq N : \quad |(s_n+v_n)-(s+v)| < 2\varepsilon = \varepsilon'$$

somit $(s_n+v_n) \to (s+v)$

(b) Produkt: $|s_n v_n \underset{-sv_n+sv_n}{-} sv| = |(s_n-s)v_n + s(v_n-v)|$

$$\leq \underbrace{|s_n-s|}_{<\varepsilon} \cdot \underbrace{|v_n|}_{\leq B} + |s| \cdot \underbrace{|v_n-v|}_{<\varepsilon} < (B+|s|)\varepsilon = \varepsilon'$$

nach S.1

argumentiere dann wie in (a)

(c) Quotient: $\frac{s_n}{v_n} = s_n \cdot \frac{1}{v_n}$

wegen (b) genügt z.z., daß $\frac{1}{v_n} \to \frac{1}{v}$

haben $|v_n| = |v + v_n - v| \geq |v| - |v_n - v|$ (mod. Δ-Ungl.)

und wegen Konvergenz $\exists N_0 \quad \forall n \geq N_0 \quad |v_n - v| < \frac{1}{2}|v|$

daher $|v_n| > \frac{1}{2}|v|$ für $n \geq N_0$ und

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v}\right| = \frac{|v-v_n|}{|v_n|\cdot|v|} < \frac{2}{|v|^2} \underbrace{|v_n - v|}_{\substack{<\varepsilon \\ \text{für } n \geq N}} < \frac{2\varepsilon}{|v|^2} = \varepsilon'$$

argumentiere damit wie in (a). ∎

Satz 3: Sei (s_n) konvergente Folge mit $s_n \leq B \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n \leq B$

Beweis: Sei $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$

indirekter Beweis: zeigen, daß Hypothese $s > B$ zu Widerspruch füh

setze $\varepsilon = s - B > 0$

wegen Konvergenz $\exists N \quad \forall n \geq N: \quad \underbrace{|s_n - s|}_{\geq\, s - s_n} < \varepsilon = s - B$

somit $s_n > B \quad \forall n \geq N$ im Wspr. zur Voraussetzung

Bem: analoge Behauptung für strikte Ungleichungen

$(s_n < B \quad \forall n \Rightarrow s < B)$ ist falsch!

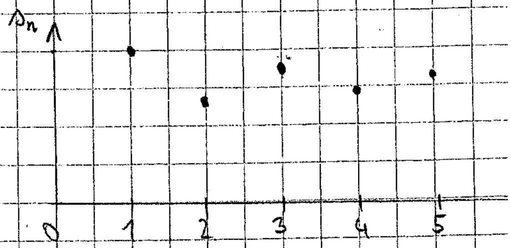
Gegenbsp: $s_n = \frac{n}{n+1} < 1$, aber $s_n \to 1$

Schwierigkeit: Def. der Konvergenz verwendet $|s_n - s|$, aber Grenzwert s oft unbekannt (oder nicht mit beliebiger Genauigkeit bekannt), kann dann nicht $|s_n - s| <$ für bel. $\varepsilon > 0$ nachweisen

Bsp: $s_1 = 1$

$s_2 = 1 - \frac{1}{3}$

$s_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$



$s_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$

(nach Kap. I erwarte $s_n \to \frac{\pi}{4}$ (Leibniz))

Idee (Bolzano, Cauchy): verlange statt $|s_n - s| < \varepsilon$, daß
$|s_n - s_{n+k}| < \varepsilon$ für alle Nachfolger s_{n+k} von s_n

Bsp: im vorigen Bsp. ist $s_{n+1} \leq s_{n+k} \leq s_n$ $\forall k \geq 1$ (n ung
$\geq \quad \geq$ (n gerade

und daher $|s_{n+k} - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = \frac{1}{2n+1}$ bel. klein für große n

Def: Eine Folge (s_n) heißt <u>Cauchy-Folge</u>, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 1 \ \forall n \geq N \ \forall k \geq 1 : |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon$$

Bolzano 1817

<u>Satz 4</u>: (<u>Cauchy' Konvergenzkriterium</u>, formuliert von Cauchy 1821)
Eine Folge (s_n) von reellen Zahlen konvergiert (mit einer reellen Zahl als Grenzwert) genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

<u>leicht</u>: Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge, wegen
$|s_n - s_{n+k}| \leq |s_n - s| + |s - s_{n+k}| < 2\varepsilon$ für $n \geq$ $k \geq$

Beweis der umgekehrten Behauptung erfordert Klärung des Begriffs der reellen Zahl!

Bem: Im Gegensatz zu Satz 1–3 ist Satz 4 im Rahmen der rationalen Zahlen nicht richtig!

Bsp: (im obigen Bsp. $s_n \to \frac{\pi}{4}$ irrational, oder:)
Dezimalfolge zu $\sqrt{2}$: $(1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \ldots)$ ist
rationale Cauchy-Folge ($|s_n - s_{n+k}| < 10^{-n+1}$ $\forall k \geq 1$), aber
$\sqrt{2}$ irrational (wäre $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ gekürzter Bruch, so $2 = \frac{p^2}{q^2}$ gekürzt $\Rightarrow q^2 = 1, p^2 = 2$

1.2 Konstruktion der reellen Zahlen (Cantor, Heine, Méray, Dedekind, Weierstraß ~1870)

Problem: wie definiert man irrationale Zahlen?

Vorstellung: reelle Zahl über Dezimalfolge eindeutig bestimmt (diese ist rationale Cauchyfolge)

z. B. $\sqrt{2}$ $\quad (1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \dots)$

1. Idee: reelle Zahl "ist" Dezimalfolge

$$\sqrt{2} \text{ "=" } (1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142, \dots)$$

Schwierigkeiten bei Addition und Multiplikation, z.B. $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$

$$\sqrt{6} \text{ "=" } (2.4,\ 2.44,\ 2.449, \dots) = (s_n)$$

aber Produkt der Dezimalfolgen von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$:

$$(2.38,\ 2.4393,\ 2.449048, \dots) = (v_n)$$

$(s_n) \neq (v_n)$, aber $(s_n - v_n)$ Nullfolge, d.h. $s_n - v_n \to 0$

2. Idee: unterscheide nicht zwischen rationalen Cauchy-Folgen die nur um Nullfolgen voneinander abweichen

mathematisch korrekt mittels Äquivalenzrelation:

Zwei rationale Cauchy-Folgen (s_n), (v_n) heißen <u>äquivalent</u> falls $s_n - v_n \to 0$.

schreibe dann: $(s_n) \sim (v_n)$

$\sim$ ist <u>Äquivalenzrelation</u>, d.h.,

$(s_n) \sim (s_n)$ reflexiv

$(s_n) \sim (v_n) \implies (v_n) \sim (s_n)$ symmetrisch

$(s_n) \sim (v_n),\ (v_n) \sim (w_n) \implies (s_n) \sim (w_n)$ transitiv fasse alle zu (s_n) äquivalenten Folgen zusammen:

$$\overline{(s_n)} = \{ (v_n) \mid (v_n) \text{ rationale Cauchy-Folge und } (v_n) \sim (s_n) \}$$

heißt <u>Äquivalenzklasse</u> von (s_n), jedes Element (v_n) daraus <u>Repräsentant</u> der ÄKlasse

beachte: $\overline{(s_n)} = \overline{(v_n)} \iff (s_n) \sim (v_n)$

$\iff \lim\limits_{n \to \infty} (s_n - v_n) = 0$

Def: <u>Reelle Zahlen</u> sind Äquivalenzklassen rationaler Cauchy-Folgen

$$\mathbb{R} = \{ \overline{(s_n)} \mid (s_n) \text{ rationale Cauchy-Folge} \}$$

(Cantor 1826)

Rationale Zahlen r werden identifiziert mit der ÄKlasse der konstanten Folge $(r, r, r, \ldots)$: $r \underset{id}{=} \overline{(r, r, r, \ldots)}$

damit: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

<u>Addition und Multiplikation</u> in $\mathbb{R}$:

Seien $s = \overline{(s_n)}$, $v = \overline{(v_n)}$ reelle Zahlen

definiere $s + v := \overline{(s_n + v_n)}$, $sv := \overline{(s_n v_n)}$

ist <u>wohldefiniert</u>: • $(s_n + v_n)$, $(s_n v_n)$ sind rationale CF (wie im Beweis von S.2, §1.1)

• falls $(s_n) \sim (s_n')$, $(v_n) \sim (v_n')$, so auch $(s_n + v_n) \sim (s_n' + v_n')$, $(s_n v_n) \sim (s_n' v_n')$

denn $(s_n + v_n) - (s_n' + v_n') \to 0$, $s_n v_n - s_n' v_n' \to 0$

(wie im Beweis von S.2, §1.1
verwende dabei: CF beschränkt, wie in S.1, §1.1)

falls $s, r \in \mathbb{Q}$, so ist mit $s \underset{id}{=} \overline{(s, s, \dots)}$, $r = \overline{(r, r, \dots)}$

$$s +_{\mathbb{R}} r = s +_{\mathbb{Q}} r \quad , \quad s \cdot_{\mathbb{R}} r = s \cdot_{\mathbb{Q}} r$$

Rechenregeln in $\mathbb{R}$ (Körperstruktur):

- <u>Kommutativität</u>: $s + r = \overline{(s_n + r_n)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Komm. in } \mathbb{Q}}}{=} \overline{(r_n + s_n)} = r + s$

  ebenso $sr = rs$

- <u>Assoziativität</u> analog — "langweilige Mühe" (Landau: Grundlagen der Analysis, 1930)
- <u>Distributivität</u>
- <u>Subtraktion und Division</u>; zu $s = \overline{(s_n)}$

  brauche $-s = \overline{(-s_n)}$, $s^{-1} = \overline{(s_n^-)}$ für $s \neq 0$,

  wobei $s_n^- = \begin{cases} s_n^{-1} & s_n \dots \\ 0 & s_n \dots \end{cases}$

  zeige wieder $-s$, $\frac{1}{s}$ für $s \neq 0$ wohldef.

  damit $s + x = r \iff x = r + (-s) =: r - s$

  $sx = r \iff x = s^{-1} r =: \frac{r}{s}$

<u>Ordnung</u> in $\mathbb{R}$:

Seien $s = \overline{(s_n)}$, $r = \overline{(r_n)}$ reelle Zahlen

def. $s < r$, falls $\underset{\delta \in \mathbb{Q}}{\exists \delta > 0}$ $\exists M \geq 1$ $\forall m \geq M$ $s_m \leq r \dots$

$s \leq r$, falls $s < r$ oder $s = r$

prüfe nach: ist wohldef. (unabh. von Wahl der Repräsenta…

$\leq$ ist <u>Ordnungsrelation</u> auf $\mathbb{R}$, d.h.,

$s \leq s$ (reflexiv)

$s \leq v,\ v \leq w \implies s \leq w$ (transitiv)

$s \leq v,\ v \leq s \implies s = v$ (antisymmetrisch)

Ordnung ist <u>vollständig</u>: für bel. $s, v \in \mathbb{R}$ gilt
entweder $s < v$ oder $s = v$ oder $s > v$ (Ü)

Ordnung ist verträglich mit Addition und Multiplikation (wie in $\mathbb{Q}$

Ordnung von $\mathbb{R}$ erweitert Ordnung von $\mathbb{Q}$: für $q, r \in \mathbb{Q}$ ist $q <_{\mathbb{R}} r \Leftrightarrow q <_{\mathbb{Q}}$

Absolutbetrag: $|s| = \begin{cases} s & s \geq 0 \\ -s & s < 0 \end{cases}$

selbe Rechenregeln wie in $\mathbb{Q}$, s. §0

erhalte $|s| = \overline{(|s_n|)}$ für $s = \overline{(s_n)}$ (Ü)

<u>$\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$</u>, d.h.

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \exists q \in \mathbb{Q} : \quad |q - s| < \varepsilon$$

<u>Beweis:</u> Sei $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ bel. vorgegeben, $\varepsilon = \overline{(\varepsilon_n)}$

(a) $0 < \varepsilon \underset{\text{Def.} <}{\implies} \exists\, \delta > 0,\ \delta \in \mathbb{Q} : \exists M \geq 1\ \forall m \geq M : 0 < \varepsilon_m$

d.h. $\varepsilon_m >$

Beh: $\varepsilon \geq \delta$

indirekt: wäre $\varepsilon < \delta$, dann

$\exists\, \delta' > 0,\ \delta' \in \mathbb{Q} : \exists M' \geq 1 \quad \forall m \geq M' \quad \varepsilon_m < \delta - \delta'$

Wspr. zu $\varepsilon_m > \delta$

somit $\varepsilon \geq \delta$

(b) Sei $s = \overline{(s_n)}$

(s_n) Cauchy-Folge: $\exists N \geq 1 \ \forall n \geq N \ \forall k \geq 1 : |s_n - s_{n+k}| < \frac{\delta}{2}$

setze $q = s_N$

haben $|s - q| = \overline{(|s_n - q|)}$

$|s - q| < \delta$ heißt $\exists \delta' > 0 \ \exists M \ \forall m \geq M : |s_m - q| < \delta - \delta'$

ist erfüllt für $M = N$, $\delta' = \delta/2$

mit $\delta \leq \varepsilon$ folgt $|s - q| < \varepsilon$ $\square$

<u>Folgerung:</u> $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

<u>Beweis:</u> wissen $\exists q \in \mathbb{Q} : \left| q - \frac{\varepsilon}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

insbes. $q - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$, somit $q < \varepsilon$

für $q = \frac{m}{n}$ ist $\frac{1}{n} \leq \frac{m}{n} < \varepsilon$ $\square$

Bem: in §1.1 hätten Def. und Satz 1-3 logisch korrekt nur für rationale Zahlen formuliert werden sollen, können sie jetzt aber auf reelle Zahlen erweitern

beweisen noch <u>Cauchy' Konvergenzkriterium</u> (S.4, §1.1):
Jede reelle Cauchy-Folge konvergiert gegen einen reellen Grenzwert

Sei (s_n) reelle Cauchy-Folge,
da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$: $\exists q_n \in \mathbb{Q} : |q_n - s_n| < \frac{1}{n}$

(a) zeigen: (q_n) rationale Cauchy-Folge
Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$\exists N \geq 1 \ \forall n \geq N \ \forall k \geq 1 \quad |s_n - s_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{3}$

nach obiger Folg. $\exists N' \in \mathbb{N} : \frac{1}{N'} < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|q_n - q_{n+k}| < \underbrace{|q_n - s_n|}_{\substack{< \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } n \geq N'}} + \underbrace{|s_n - s_{n+k}|}_{\substack{< \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } n \geq N}} + \underbrace{|s_{n+k} - q_{n+k}|}_{\substack{< \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{für } n \geq N'}}$$

$$< \varepsilon \quad \text{für } n \geq M := \max\{N, N'\}$$

(b) setze $s := \overline{(q_n)} \in \mathbb{R}$, zeige $s_n \to s$

Sei $\varepsilon > 0$ bel.

$$|s_n - s| \leq \underbrace{|s_n - q_n|}_{< \frac{1}{n}} + |q_n - s|$$

wissen: $\exists M \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{M} < \frac{\varepsilon}{3}$ und

$$\forall m, n \geq M : |q_n - q_m| < \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} - \delta \quad \text{mit } \delta = \frac{\varepsilon}{3}$$

Sei nun $n \geq M$ bel.

nach Def. von $<$: $q_n - s < \frac{2\varepsilon}{3}$ und $s - q_n < \frac{2\varepsilon}{3}$

somit $|s_n - s| \leq |s_n - q_n| + |q_n - s| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$

1.3 Monotone Folgen und Supremum

Def: Sei $X \subset \mathbb{R}$. Ein $\xi \in \mathbb{R}$ heißt Supremum von X (oder kleinste obere Schranke von X), falls

(i) $\forall x \in X : x \leq \xi$ (ξ obere Schranke von X)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X : x > \xi - \varepsilon$ ($\xi - \varepsilon$ keine obere Schrank

schreiben $\xi = \sup X$

Satz 1: (Bolzano 1817) Sei X nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$.
Ist X nach oben beschränkt (d.h. $\exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in X : x \leq B$)
so besitzt X ein Supremum in $\mathbb{R}$ (d.h. $\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = \sup X$)

Bem: nicht richtig in $\mathbb{Q}$, Gegenbsp: $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ hat kein Supremum in $\mathbb{Q}$!

Beweis: (beruht auf Cauchy' Konvergenzkriterium)
konstruieren reelle Folgen (α_n) und (β_n), sodaß

$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots$, $\dots \beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1$, $\alpha_n - \beta_n \to 0$

α_n keine obere Schranke von X, β_n ist obere Schranke

$\exists x \in \mathbb{R} : x \in X$ $\quad \alpha_1 := x - 1$ keine obere Schranke von X

$\beta_1 := B$ ist -"-

$\alpha_1 \quad \gamma \quad \beta_1$

setze $\gamma = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}$ (Bisektion)

2 Fälle möglich: γ obere Schranke: setze $\beta_2 = \gamma$, $\alpha_2 = \alpha_1$

γ keine obere Schranke: $\alpha_2 = \gamma$, $\beta_2 = \beta_1$

nach Konstruktion $\beta_2 - \alpha_2 = \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_1)$

wiederhole Bisektion mit α_2, β_2, erhalte α_3, β_3 usw.
erhalte Folgen $(\alpha_n), (\beta_n)$ mit

$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| = \alpha_{n+k} - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{2^{n-1}} \quad \forall k \geq$

$|\beta_n - \beta_{n+k}| = \beta_n - \beta_{n+k} \leq \beta_n - \alpha_n$

somit $(\alpha_n), (\beta_n)$ Cauchy-Folgen und daher konvergent (S.4, §1.

$\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$, $\beta_n \to \beta \in \mathbb{R}$ $\underset{S.2, §11}{\Longrightarrow}$ $\alpha_n - \beta_n \to \alpha - \beta$

nach obigem $\alpha_n - \beta_n \to 0$, somit $\alpha = \beta =: \xi$

Sei $x \in X$ bel. wissen $x \leq \beta_n$ (obere Schranke)
$\downarrow$
ξ

nach S.3, §1.1: $x \leq \xi$

somit ξ obere Schranke: $\forall x \in X \quad x \leq \xi$

Sei $\varepsilon > 0$ bel. da $\alpha_n \to \xi$, $\exists n: \xi - \alpha_n < \varepsilon$

α_n keine obere Schranke: $\exists x \in X: x > \alpha_n > \xi - \varepsilon$

damit gezeigt: $\xi = \sup X$ □

1.12.

Satz 2: (Monotoniekriterium)
Ist die Folge (s_n) monoton steigend (d.h. $s_n \leq s_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$) und nach oben beschränkt (d.h. $s_n \leq B \; \forall n \in \mathbb{N}$), so konvergiert sie gegen einen reellen Grenzwert.

Beweis: $X = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, nach oben beschränkt

nach S.1 existiert $\xi = \sup X$, d.h.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}: & s_n \leq \xi \\ \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: & s_N > \xi - \varepsilon \end{cases}$$

für $n \geq N$: $|s_n - \xi| = \xi - s_n \underset{\uparrow \; s_n \geq s_N}{\leq} \xi - s_N < \varepsilon$

also $s_n \to \xi$ □

Folgerung: (Vergleichskriterium) Für Folgen (s_n), (v_n) gelte:

$s_n \leq s_{n+1}$, $s_n \leq v_n$ $\quad \forall n \geq n_0$

Dann:
(v_n) konvergiert $\Longrightarrow$ (s_n) konvergiert
(s_n) divergiert $\Longrightarrow$ (v_n) divergiert

<u>Beweis:</u> (v_n) konv. $\underset{S.1,\,G1.1}{\Longrightarrow}$ (v_n) beschränkt

$\Longrightarrow$ (s_n) –"–

(s_n) monoton steigend $\Big\} \underset{S.2}{\Longrightarrow}$ (s_n) konv

(2. Beh.: $A \Rightarrow B$ logisch gleichwertig zu $\neg B \Rightarrow \neg A$) $\square$

<u>Bem:</u> analog Infimum (größte untere Schranke) $\xi = \inf X$

$$\begin{cases} \forall x \in X : \; x \geq \xi \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x \in X : \; x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$

monoton fallende Folgen $s_n \geq s_{n+1}$

S.1, S.2 analog

<u>1.4 Häufungspunkte</u>

Bsp: $(s_n) = \left(\underbrace{-\tfrac{1}{2}}, \tfrac{3}{2}, \underbrace{-\tfrac{1}{3}}, \tfrac{4}{3}, \underbrace{-\tfrac{1}{4}}, \tfrac{5}{4}, \underbrace{-\tfrac{1}{5}}, \tfrac{6}{5}, \ldots \right)$ $\longrightarrow 0$, $\longrightarrow 1$

konvergiert nicht, aber "Teilfolgen" $(s_{2n-1}) \to 0$, $(s_{2n}) \to$

<u>Def:</u> Eine Folge (s_n') heißt <u>Teilfolge</u> von (s_n), falls es natürliche Zahlen $\sigma(1) < \sigma(2) < \sigma(3) < \ldots$ gibt, sodaß

$$s_n' = s_{\sigma(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Def:</u> s heißt <u>Häufungspunkt</u> der Folge (s_n), falls es eine Teilfolge von (s_n) gibt, die gegen s konvergiert.

Bsp: 0, 1 Häufungspunkte im obigen Bsp.

Bsp: $\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{6}, \ldots\right)$ hat <u>alle</u> $s \in \mathbb{R}$ mi

$0 \leq s \leq 1$ als HP. z.B. $\ln 2 = 0{,}693147\ldots$ Grenzwert der Dezimalfolge

$\left(\tfrac{6}{10}, \tfrac{69}{100}, \tfrac{693}{1000}, \ldots\right)$, diese ist Teilfolge obiger Folg

Bsp: $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ hat keinen Häufungspunkt

<u>Satz</u>: (<u>Satz von Bolzano-Weierstraß</u>; Weierstraß 1874)
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat mindestens einen Häufungspunkt.

<u>Beweis</u>: (beruht auf S.1, §1.3 von Bolzano)
Sei (s_n) beschränkte Folge: $|s_n| \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$

def. $X = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq N : s_n > x\}$
($s_n > x$ für unendlich viele n)

$s_n \geq -B \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies -B-1 \in X \implies X \neq \emptyset$

$s_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies B \notin X \implies B$ obere Schranke von X

nach S.1, §1.3 existiert daher $\xi = \sup X$, zeigen: ξ HP

nach Def. von $\sup X$: für bel. $\varepsilon > 0$ gilt

$\exists x \in X : x > \xi - \varepsilon \implies s_n > \xi - \varepsilon$ für ∞ viele n

$\xi + \varepsilon \notin X \implies s_n > \xi + \varepsilon$ nur für endl. viele n.

$\implies \xi - \varepsilon \leq s_n \leq \xi + \varepsilon$ für ∞ viele n

$\exists \sigma(1) \in \mathbb{N} : \quad \xi - 1 \leq s_{\sigma(1)} \leq \xi + 1$, setze $s'_1 = s_{\sigma(1)}$

$\exists \sigma(2) > \sigma(1) : \quad \xi - \frac{1}{2} \leq s_{\sigma(2)} \leq \xi + \frac{1}{2}$ $\qquad s'_2 = s_{\sigma(2)}$

allg. $\exists \sigma(n) > \sigma(n-1) : \quad \xi - \frac{1}{n} \leq s_{\sigma(n)} \leq \xi + \frac{1}{n}$, setze $s'_n = s_{\sigma(n)}$

haben $|s'_n - \xi| \leq \frac{1}{n}$ und somit $s'_n \to \xi$

Bem: Beweis ergab <u>größten</u> HP, heißt "Limes superior":

$$\xi = \limsup_{n \to \infty} s_n = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid s_n > x \text{ für unendl. viele } n\}$$

kleinster HP: $\liminf_{n \to \infty} s_n = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid s_n < x \text{ für unendl. viele } n\}$

Bsp: für obige Folge $(s_n) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots\right)$ ist

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = 1 \quad , \quad \liminf_{n\to\infty} s_n = 0 \quad ,$$

$$\sup\{s_n\} = \frac{3}{2} \quad , \quad \inf\{s_n\} = -\frac{1}{2}$$

2 Reihen

2.1 Konvergenz von Reihen

Was ist $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$?

betrachte Partialsummen $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0+a_1+a_2, \ldots$

allg. $s_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$

verwende Bez. $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ (oder $\sum_{j\geq 0} a_j$ oder $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ oder Σa

- als Symbol für die Folge der Partialsummen (s_n)

  in diesem Sinn sage:

  Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ konvergiert / divergiert , falls (s_n) konvergiert / divergiert

- als Symbol für Grenzwert der Partialsummen ("Summe der Reih

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \quad \text{(falls existie}$$

Bsp: geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = q^0 + q^1 + q^2 + q^3 + \ldots$

$$s_n = \sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{für } q \neq 1 \qquad \text{(Induktion)}$$

nach HS aus §1.1 : $\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$ falls $|q| < 1$

divergiert, strebt gegen $+\infty$ für $q \geq 1$

divergiert für $q \leq -1$

2.2 Konvergenzkriterien

Cauchy' Konvergenzkriterium für (s_n):

wegen $s_{n+k} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}$ erhalte sofort

Satz 1: Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert gegen eine reelle Zahl
$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 : \quad |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$ □

Bsp: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$ konvergiert (gegen e), denn

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{1}{j!} = \frac{1}{n!}\Big(\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}_{\leq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{(n+1)\cdots(n+k)}}_{\leq \frac{1}{2^k}}\Big)$$

für $n \geq 1$

$$\leq \frac{1}{n!}\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \leq \frac{1}{n!} < \varepsilon, \text{ falls } n \text{ gen. groß}$$

Mit $k=1$ erhalten aus S.1 als notwendige Bedingung für Konvergenz

$$\lim_{j\to\infty} a_j = 0,$$

ist aber nicht hinreichend, Gegenbsp.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}^{8 \text{ mal}}}_{\frac{1}{2}} + \dots$$

Monotoniekriterium für (s_n) (S.2, §1.3) gibt

Satz 2: Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ mit $a_j \geq 0 \ \forall j$ konvergiert
$\iff$ Folge ihrer Partialsummen beschränkt □

wie in §1.3 erhalten

Folgerung: Sei $0 \leq a_j \leq b_j \quad \forall j$. Dann gilt:

$\sum b_j$ konvergiert $\Rightarrow$ $\sum a_j$ konvergiert (Majoranten-kriterium)

$\sum a_j$ divergiert $\Rightarrow$ $\sum b_j$ divergiert

Bsp: Divergenz der harmonischen Reihe (Oresme ~ 1350)

$$\sum b_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots \text{ divergiert}$$

$$\text{da } \sum a_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots \text{ divergiert}$$

Bsp: Die Reihe $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \ldots$

konvergiert für $\alpha > 1$, divergiert für $\alpha \leq 1$.

Beweis: $\alpha = 1$ oben, damit auch für $\alpha < 1$ wegen $\frac{1}{j^\alpha} > \frac{1}{j}$ $\forall$

$\alpha > 1$: geben Schranke für Partialsummen an

zu bel. n sei l so, daß $2^l - 1 \geq n$

$$s_n \leq s_{2^l-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(l-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{(2^l-1)^\alpha}\right)$$

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{(l-1)\alpha}} + \ldots + \frac{1}{2^{(l-1)\alpha}}\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \ldots + \frac{2^{l-1}}{(2^{l-1})^\alpha}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^j = \frac{1}{1 - 2^{1-\alpha}}$$

$\square$

3.1

Satz 3: (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge ($a_n \geq a_{n+1}$, $a_n \to$) $\overset{\vee}{0}$

so konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j a_j$.

Beweis: Sei s_n n-te Partialsumme, haben

$$s_{2k+1} = s_{2k} - a_{2k+1} \leq s_{2k}$$

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \geq s_{2k-1}$$

$$s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k}$$

damit $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \ldots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$

$$\Longrightarrow \quad |s_{n+k} - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1} \qquad (*)$$

da $a_n \to 0$, ist (s_n) Cauchy-Folge und somit konvergent: $s_n \to s$

Bem: Mit $k \to \infty$ in $(*)$ erhalte $|s - s_n| \leq a_{n+1}$.

Bsp: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots$ konvergiert.

Umordnen der Reihe:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{\frac{1}{14}} - \frac{1}{16} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

Hälfte von zuvor!

Summe einer Reihe kann von der Reihenfolge der Terme abhängen!

Def: Eine Folge $(\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots)$ von Zahlen in $\mathbb{N}_0$ heißt: Umordnung von $\mathbb{N}_0$, falls darin jede Zahl aus $\mathbb{N}_0$ genau einmal vorkommt.

Def: Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j'$ heißt Umordnung der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, falls es eine Umordnung von $\mathbb{N}_0$ gibt, sodaß $a_j' = a_{\sigma(j)}$ $\forall j$

Def: Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ konvergiert.

Bsp: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ konvergent, aber nicht absolut kon

Bem: absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent (C.K.K: $|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$

Satz 4: Falls die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absolut konvergent ist, konvergieren alle ihre Umordnungen gegen denselben Grenzwe

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ bel. gegeben. Falls Reihe abs. konvergent, gilt nach S.1 (C.K.K.)

$\exists N \geq 0 \ \forall n \geq N \ \forall k \geq 1 : |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}| < \varepsilon$

damit für $n \geq N$:

$$(*) \quad |s_n - s_{n+k}| = |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon$$

zu einer Umordnung $\sum_{j=0}^{\infty} a_j'$ wähle $M \geq N$ so, daß $a_0, a_1, \dots, a_N$ in M-ter Partialsumme $s_M' = \sum_{j=0}^{M} a_j'$ vorkommen

Für $m \geq M$ entfallen in Differenz $s_m - s_m'$ alle $a_0, \dots, a_N$, daher für ein genügend großes $k \geq 1$

$$(**) \quad |s_m - s_m'| \leq |a_{N+1}| + \dots + |a_{N+k}| < \varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Wegen } (*) : & s_n \to s \in \mathbb{R} \\ \text{wegen } (**) : & s_n - s_n' \to 0 \end{array}\right\} s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n'$$

im folgenden 2 Kriterien für absolute Konvergenz, die auf Vergleich mit der geometrischen Reihe beruhen:

<u>Satz 5:</u> (<u>Quotientenkriterium</u>, Cauchy 1821)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \text{Reihe } \sum_{j=0}^{\infty} a_j \text{ absolut konv.}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \text{—\,''\,— divergiert}$$

<u>Beweis:</u> (a) $\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \sup\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall N \geq 0\ \exists n \geq N : \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > x \right\}$

$< q < 1$ (wähle so ein q)

dann $\exists N \geq 0 \ \forall n \geq N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$

damit $|a_{N+1}| \leq q |a_N|, \quad |a_{N+2}| \leq q |a_{N+1}| \leq q^2 |a_N|, \dots$

$|a_{N+k}| \leq q^k |a_N| \qquad \forall k \geq 1$

daher $\sum_{k=0}^{m} |a_{N+k}| \leq \sum_{k=0}^{m} q^k |a_N| \leq \frac{1}{1-q} |a_N| \qquad \forall m \geq 1$

nach Monotoniekriterium (S.2) : $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ abs konvergent

(b) Falls $\liminf_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, dann $\exists N\ \forall n \geq N\ |a_{n+1}| \geq |a_n|$

$\Rightarrow \quad a_n \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ divergiert □

Bsp: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ (Reihe für e^x) $\quad a_j = \frac{x^j}{j!}$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$\underset{S.5}{\Rightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ abs. konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$

ebenso: $\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$ (Reihe für $\cos x$) abs. konv. $\forall x \in$

$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$ (–"– $\sin x$) –"–

Satz 6: (Wurzelkriterium, Cauchy 1821)

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j$ absolut konvergent

> 1 divergent

Beweis: (a) falls $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$, dann

$$\exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N : \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

$$|a_n| \leq q^n$$

Vergleich mit geometrischer Reihe ergibt absolute Konvergenz

(b) falls $\text{–"–} > q > 1$

$\Rightarrow |a_n| \geq q^n$ für unendl. viele n

$\Rightarrow a_n \not\to 0$

$\Rightarrow$ Reihe divergiert □

2.3 Vertauschen von Grenzwerten und Reihen

Erinnerung: Eulers Herleitung der Exponentialfunktion

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{n^3} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n\cdot n \cdots n}}_{\to 1 \quad n\to\infty \text{ , für jedes feste } j} \frac{x^j}{j!}$$

Ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\cancel{n}\,\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n\cdot n \cdots n}\frac{x^j}{j!} \overset{?}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n\cdot n \cdots n}\frac{x^j}{j!}$$

dann

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

allgemeiner: betrachte Folge von Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}$, $n\in\mathbb{N}$

Unter welchen Bedingungen ist $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} = \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty} a_{nj}$?

(Gegenbsp: $a_{nj} = \begin{cases} \frac{1}{n} & j<n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\qquad \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n} = 1$

$\lim_{n\to\infty} a_{nj} = 0$

Satz 1: (monotone Konvergenz) Es gelte

$$a_{n+1,j} \geq a_{nj} \geq 0 \quad \forall n,j\in\mathbb{N}_0 \quad , \quad \sum_{j=0}^{n} a_{nj} \leq B \quad \forall n$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} = \sum_{j=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty} a_{nj}$$

(und beide Ausdrücke existieren)

8.12.
(VL Umfrage

Beweis: haben $0 \leq a_{nj} \leq a_{n+1,j} \leq B \quad \forall n,j$

nach Monotoniekriterium (S.2, §1.3): $\alpha_j := \lim_{n\to\infty} a_{nj}$ existiert

setze
$$s_{nm} = \sum_{j=0}^{m} a_{nj}$$

haben
$$s_{nm} \leq s_{n,m+1} \qquad \forall n,m$$
$$s_{nm} \leq s_{n+1,m}$$

und $s_{nm} \leq B \quad \forall n,m$, denn:

für $n \geq m$ ist $s_{nm} \leq s_{nn} \leq B$ (nach VS)

für $n \leq m$ ist $s_{nm} \leq s_{mm} \leq B$

nach Monotoniekrit. existieren $s_n = \lim_{m\to\infty} s_{nm} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}$

und $\sigma_m = \lim_{n\to\infty} s_{nm} = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j$

haben $s_n \leq s_{n+1} \leq B \quad \forall n \quad \underset{\text{Monotonie}}{\Longrightarrow} \quad s = \lim_{n\to\infty} s_n$ ex.

$\sigma_m \leq \sigma_{m+1} \leq B \quad \forall m \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \lim_{m\to\infty} \sigma_m$ ex.

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} \quad , \qquad \sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nj}$$

haben $s_{nm} \leq s_n \quad \forall n,m$

$n \to \infty$: $\sigma_m \leq s$ (s. §1.1)

$m \to \infty$: $\sigma \leq s$

aber auch $s_{nm} \leq \sigma_m \quad \forall n,m$

$m \to \infty$: $s_n \leq \sigma$

$n \to \infty$: $s \leq \sigma$

somit $s = \sigma$ $\square$

Satz 2: (dominierte Konvergenz ; ? i.w. Weierstraß) Es gelte:

$|a_{nj}| \leq b_j \quad \forall n,j \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ konvergiere

$\lim_{n\to\infty} a_{nj}$ existiere $\forall j \in \mathbb{N}_0$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_{nj}$$

und beide Ausdrücke existieren

Beweis: Sei wieder $\alpha_j := \lim_{n\to\infty} a_{nj}$, haben $|\alpha_j| \leq b_j \ \forall j$

setzen $s_{nm} = \sum_{j=0}^{m} a_{nj}$, $s_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj}$ abs. konvergent (Vergleichskrit.)

$\sigma_m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j$, $\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j$ –"–

Sei $\varepsilon > 0$ bel., betrachte

$$|s_n - \sigma| \leq |s_n - s_{nm}| + |s_{nm} - \sigma_m| + |\sigma_m - \sigma|$$

einzelne Terme:

- $|s_{n,m+k} - s_{nm}| = |a_{n,m+1} + \dots + a_{n,m+k}|$
  $\leq |a_{n,m+1}| + \dots + |a_{n,m+k}| \leq b_{m+1} + \dots + b_{m+k} \underset{\uparrow}{<} \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad \exists M \ \forall m \geq M \ \forall k$

$k \to \infty$: $|s_n - s_{nm}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, wähle i.f. $m = M$

- $|s_{nm} - \sigma_m| = \left| \sum_{j=0}^{m} (a_{nj} - \alpha_j) \right| \underset{\uparrow}{<} \frac{\varepsilon}{3}$

  $\exists N \ \forall n \geq N$

- $|\sigma_m - \sigma_{m+k}| \leq |\alpha_{m+1}| + \dots + |\alpha_{m+k}| \leq b_{m+1} + \dots + b_{m+k} < \frac{\varepsilon}{3}$

$k \to \infty$: $|\sigma_m - \sigma| \leq \frac{\varepsilon}{3}$

damit $|s_n - \sigma| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, erhalte $\lim_{n\to\infty} s_n = \sigma$

(Bem: Lebesgue 1904 analoge Sätze zu S.1 und S.2 für Integrale statt Summen)

Bsp: $a_{nj} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{n\cdot n \quad \dots \quad n} \cdot \frac{x^j}{j!}$, $x \in \mathbb{R}$ bel.

$|a_{nj}| \leq \frac{|x^j|}{j!}$, wissen: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$ abs. konv.

$$\lim_{n\to\infty} a_{nj} = \frac{x^j}{j!}$$

S.2 anwendbar, liefert hier $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$.
(für $x \geq 0$ auch S.1)

rechtfertige ebenso Reihenentwicklungen von sin, cos (Kap. I, § 4.3) und auch Euler' Produktdarstellung für sin (Kap. I, § 5.7: nehme dort log: Produkte gehen über in Summen)

als weitere Folgerung erhalten Satz über Doppelreihen (Cauchy 1821)

Satz 3: Es sei $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} |a_{kj}| \leq B \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}\right)$$

(und alle diese Reihen sind absolut konvergent)

Beweis: setze $s_{nj} = \sum_{k=0}^{n} a_{kj}$

haben $|s_{nj}| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_{kj}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_{kj}| =: b_j$

ex. nach Monotoniekriterium

und $\sum_{j=0}^{\infty} b_j \leq B$ wegen VS

$$\lim_{n\to\infty} s_{nj} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} \quad \text{(abs. konv.)}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kj} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} s_{nj} \overset{\text{S.2}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_{nj}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{kj}$$

endl. Summe mit
Grenzwert vertauschbar: S.2, §1.1

$\square$