Analysis I, WS 2020/21

Literatur: E. Hairer & G. Wanner, Analysis by Its History, Springer 1996
u.a. K. Königsberger, Analysis 1, Springer 1992
6. Aufl. 2003

I. Einführung: Elementare Funktionen

Polynome, Exponentialfunktion, Logarithmen, trigonometrische Funktionen

frei nach L. Euler (1748), Introductio in Analysin Infinitorum
mit den Mitteln der damaligen Zeit, Lücken motivieren spätere strenge Behandlg.
der math. Strenge
"mit den Augen des Entdeckers"

1 Polynomfunktionen

Al-Khowarizmi (830) : Al-jabr w'al muqâbala

$\downarrow$ (Algorithmus) $\quad\quad$ $\downarrow$ (Algebra)

Lösen quadratischer Gleichungen an Bsp. wie

$$x^2 + 10x = 39 \quad \text{(in heutiger Notation)}$$

Scipione da Ferro, Tartaglia, Cardano ~ 1530
Lösen kubischer Gleichungen an Bsp. wie

$$x^3 + 6x = 20 \quad \text{(in heutiger Notation)}$$

" in schlechten italienischen Versen" (laut Lagrange 1795)

Änderungen in der Notation seit Ende 16. Jh.:

führe Buchstaben A, B, C, X, ... für bekannte und unbekannte Größen ein, rechne mit diesen wie mit Zahlen

Viète (1600): Algebra nova

Bsp.:

$$\begin{array}{r} B + 2D \\ A + 3D \\ \hline A + B + 5D \end{array}$$

Lösen quadratischer Gleichungen wird damit zur Formel:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1, x_2 = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

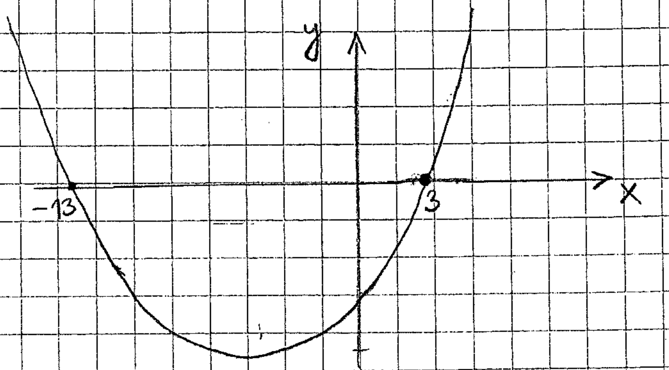
x "Unbekannte"

Descartes 1637: Verbindung Algebra – Geometrie
(1596 – 1650)

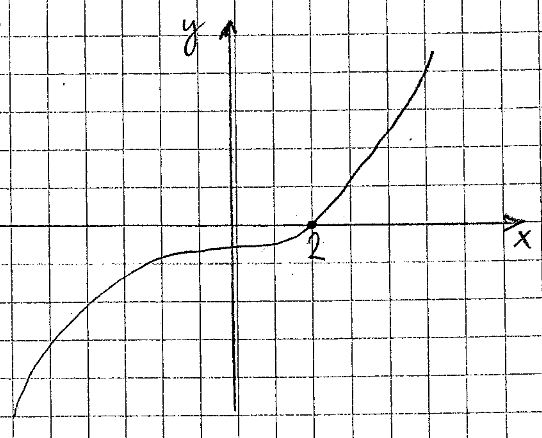
Euklid 300 v.C.: Elemente
~~Appollonius 200 v.C: Kegelschnitt~~

$y = x^2 + 10x - 39$

x aufgefaßt als "Veränderliche"



$y = x^3 + 6x - 20$



Ein <u>Polynom</u> ist ein Ausdruck der Form

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

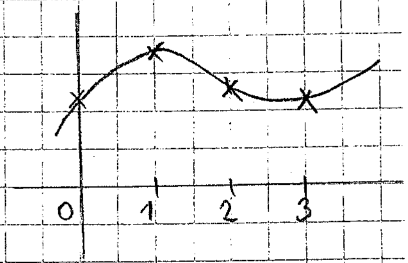
wobei $a_0, a_1, \dots, a_n$ beliebige Konstanten.
Falls $a_n \neq 0$, ist das Polynom vom <u>Grad</u> n

<u>Interpolationsproblem</u>

geg: $n+1$ Punkte x_i, y_i $(i = 0, 1, \dots, n)$
ges: Polynom vom Grade höchstens n durch diese Punkte

betrachten äquidistante x_i, insbes.

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \dots$$



(im frühen 17. Jh. (Briggs, Harriot): nützlich für die Erstellung von Logarithmentafeln)

Lösungszugang Newton's (1676) im Sinne der „Algebra nova":
(1642 - 1727)
schreibe Buchstaben für die unbekannten Koeffizienten des Polynoms, z. B.

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

transformiere das "Problem" in "algebraische Gleichungen":

$x = 0$	:	A	$= y_0$
$x = 1$	:	$A + B + C + D$	$= y_1$
$x = 2$	:	$A + 2B + 4C + 8D$	$= y_2$
$x = 3$	:	$A + 3B + 9C + 27D$	$= y_3$

subtrahiere 1. Gl. von 2. Gl., 2. Gl. von 3. Gl., 3. Gl. von 4. Gl.:
A geht weg, es bleiben

$$B + C + D = y_1 - y_0 =: \Delta y_0$$
$$B + 3C + 7D = y_2 - y_1 =: \Delta y_1$$
$$B + 5C + 19D = y_3 - y_2 =: \Delta y_2$$

B geht weg durch nochmalige Subtraktion:

$$2C + 6D = \Delta y_1 - \Delta y_0 =: \Delta^2 y_0$$
$$2C + 12D = \Delta y_2 - \Delta y_1 =: \Delta^2 y_1$$

C wird ebenso eliminiert:

$$6D = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0$$

erhalten daraus D, durch Einsetzen oben C, dann B: somit

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

mit
$$A = y_0$$
$$B = \Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0$$
$$C = \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{1}{2}\Delta^3 y_0$$
$$D = \frac{1}{6}\Delta^3 y_0$$

bzw.

$$y = y_0 + \Delta y_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 y_0}{2}(x^2 - x) + \frac{\Delta^3 y_0}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

bzw.

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y_0$$

Das läßt folgende Formel für den allgemeinen Fall vermuten:

Satz: Das Polynom vom Grad höchstens n mit den Werten

y_0 (für $x=0$), y_1 (für $x=1$), ..., y_n (für $x=n$)

ist gegeben durch

$$y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot n}\Delta^n y_0$$

Beweis im nächsten Abschnitt mit Pascal' Dreieck

Anordnung im Differenzenschema

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & \\
 & \Delta y_2 & & \\
y_3 & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

wobei $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$

$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$

etc.

Bsp:

$$\begin{array}{lllll}
\underline{4} & & & & \\
 & \underline{1} & & & \\
5 & & \underline{-4} & & \\
 & -3 & & \underline{10} & \\
2 & & 6 & & \underline{-22} \\
 & 3 & & -12 & \\
5 & & -6 & & \\
 & -3 & & & \\
2 & & & &
\end{array}$$

$$y = 4 + \frac{1}{1}\cdot x - \frac{4}{1\cdot 2}x(x-1) + \frac{10}{1\cdot 2\cdot 3}x(x-1)(x-2) - \frac{22}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Bsp: $\quad y_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x = 0 & : & 0 & & & & & & \\
 & & & 1^3 & & & & & \\
1 & & 1^3 & & 7 & & & & \\
 & & & 2^3 & & 12 & & & \\
2 & & 1^3 + 2^3 & & 19 & & 6 & & \\
 & & & 3^3 & & 18 & & 0 & \\
3 & & 1^3 + 2^3 + 3^3 & & 37 & & 6 & & 0 \\
 & & & 4^3 & & 24 & & 0 & \\
4 & & 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 & & 61 & & 6 & & 0 \\
 & & & 5^3 & & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

$$y = 0 + \frac{1}{1} \cdot x + \frac{7}{1 \cdot 2} x(x-1) + \frac{12}{1 \cdot 2 \cdot 3} x(x-1)(x-2) + \frac{6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}$$

somit für $x = n$: $\quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$

ebenso:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

2 Potenzen, binomischer Lehrsatz und Exponentialfunktion

2.1 Potenzen

betrachten für beliebige Zahl a die "geometrische Folge"

$$a, \quad a\cdot a = a^2, \quad a\cdot a\cdot a = a^3, \quad a\cdot a\cdot a\cdot a = a^4, \ldots$$

(Notation allmählich seit Ende 16. Jh.)

beachte $\quad a^2\cdot a^3 = (a\cdot a)\cdot(a\cdot a\cdot a) = a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a = a^5$

bzw. allgemeiner für positive ganze Exponenten m, n

$$\underline{a^m a^n = a^{m+n}} \qquad (*)$$

erweitern geometrische Folge nach links (jeweils Division durch $a \neq 0$)

$$\ldots, a^{-2} = \frac{1}{a^2}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a\cdot a, \quad a^3 = a^2\cdot a, \ldots$$

Mit Notation $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ bleibt $(*)$ für alle ganzen Exponenten (auch negative) richtig.

multiplizieren nun mit $\sqrt{a}$ $\quad (a>0)$

$$1, \sqrt{a}, \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a, \quad \sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a^3}, \quad (\sqrt{a})^4 = a^2 = \sqrt{a^4}$$

Notation (Newton 1671) $\quad a^{1/2} = \sqrt{a}, \quad a^{3/2} = \sqrt{a^3}, \ldots$

$(*)$ bleibt auch für solche Exponenten richtig

allgemeiner: $\quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad$ (für $a>0$)

wobei $b = \sqrt[n]{a}$ n-te positive Wurzel: $b>0$ mit $b^n = a$

[Existenz?] !

(*) ist damit richtig für <u>rationale</u> Exponenten

schließlich : irrationale Exponenten

Euler (1748) erklärt am Bsp. $\sqrt{7} = 2.645\ldots$

$a^{\sqrt{7}}$ Zahl zwischen a^2 und a^3

$a^{26/10}$ $\quad$ $a^{27/10}$

$a^{264/100}$ $\quad$ $a^{265/100}$

$\vdots$

∇

13.10.1998

2.2 Binomischer Lehrsatz

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^n = \,?$ für allgemeines n

Binomialkoeffizienten

1

1 1

1 2 1

jede Zahl Summe der beiden oberen Einträge

1 3 3 1

1 4 6 4 1

+

1 am Rand

1 5 10 10 5 1

<u>Pascal' Dreieck</u> (nach Pascal 1654, M. Stifel 1544, Omar Alkhaijama 1080)

(z.B. Koeff. von a^3b^2 in $(a+b)^5 = (a+b)^4 \cdot (a+b)$:

$$\underline{4}\,a^3b \cdot b \quad + \quad \underline{6}\,a^2b^2 \cdot a \quad = \quad \underline{10}\,a^3b^2 \;)$$

allgemeines Gesetz?

betrachten dazu wie Pascal (1654) das Verhältnis jeder Zahl mit ihrem linken Nachbarn:

$$\frac{1}{1}$$

$$\frac{2}{1} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{1} \quad \frac{2}{2} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{1} \quad \frac{4}{2} \quad \frac{3}{3} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{5}$$

allgemeines Gesetz hier leicht zu erraten:

Verhältnisse in n-ter Zeile sind $\frac{n}{1} \quad \frac{n-1}{2} \quad \frac{n-2}{3} \quad \ldots$ (*)

<u>Beweis</u> durch <u>vollständige Induktion</u> über Zeilenzahl:

2 Schritte: 1. Bch. gilt für ~~1. Zeile~~ $n=1$ ✓ (Induktionsanfang)

2. zeigen: falls Bch. richtig für irgendeine ~~Zeile~~ n, so auch für ~~die nächste~~ $n+1$ (Induktionsschluß, Schluß von n auf $n+1$)

Sei $A \quad B \quad C$

$\quad D \quad E$

$D = A + B, \quad E = B + C$

Teil des Pascal' Dreieck

Induktionsannahme: $\frac{B}{A} = \frac{k}{l-1}$, $\frac{C}{B} = \frac{k-1}{l}$

Dann ist

$$\frac{E}{D} = \frac{B+C}{A+B} = \frac{1+\frac{C}{B}}{\frac{A}{B}+1} = \frac{1+\frac{k-1}{l}}{\frac{l-1}{k}+1} = \frac{kl+k^2-k}{l^2-l+kl} = \frac{k}{l}$$

somit gilt selbe Gesetzmäßigkeit (*) auch in nächster Zeile

Damit ist (*) gezeigt.

Die n-te Zeile des Pascal' Dreiecks enthält daher Produkte dieser Verhältnisse:

$$1 \qquad \frac{n}{1} \qquad \frac{n\,(n-1)}{1\cdot 2} \qquad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \qquad \dots$$

erhalten somit

Satz: (Binomischer Lehrsatz, Pascal 1654) Für $n = 1, 2, 3, \dots$ ist

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

Die Summe ist endlich und hört nach $n+1$ Termen auf.

Bem: Bei Division durch a^n gilt mit $x = \frac{b}{a}$: $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$

Bezeichnung: $\frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)(n-j)\dots 2\cdot 1}{1\cdot 2 \cdots j \quad (n-j)\cdots 2\cdot 1} =$

$$= \frac{n!}{j!\,(n-j)!} = \binom{n}{j} \qquad \underline{\text{Binomialkoeff.}}$$

mit $n! = n(n-1)\dots 2\cdot 1$ <u>Faktorielle</u> von n

2.3 Anwendung auf das Interpolationspolynom

hatten Differenzenschema

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_1 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 \\
y_2 & & \Delta^2 y_1 & \quad \ddots \\
 & \Delta y_2 & & \\
y_3 & & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

jeder Eintrag ist Summe des oberen mit dem rechten oberen Nachbarn
daher lautet Schema

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
 & \Delta y_0 & & \\
y_1 = y_0 + \Delta y_0 & & \Delta^2 y_0 & \\
 & \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^3 y_0 \\
y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & \\
 & \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & \\
y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & &
\end{array}$$

erhalten wieder Pascal' Dreieck in den Koeffizienten, somit

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

Daher nimmt $y = y_0 + \frac{x}{1}\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$

an den Stellen $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ die Werte $y_0, y_1, \ldots, y_n$ an.

Dies beweist Satz aus §1.

2.4 Negative Exponenten

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 \qquad \text{falls } |x| \text{ klein}$$

$$\frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = -x\,\frac{1}{1+x} \approx -x$$

d.h. $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ verbesserte Näherung

$$\frac{1}{1+x} - (1-x) = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = x^2\,\frac{1}{1+x} \approx x^2$$

d.h. $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2$

etc. (Induktion)

$$\frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2 - \dots + (-x)^n\right) = \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{für } |x|<1$$

erhalten

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \dots \quad , \quad |x|<1$$

geometrische Reihe (..., Viète 1593)

beachte $(-1)^j = \frac{(-1)\cdot(-1-1)\cdot\ldots\cdot(-1-j+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot j}$

d.h., binomischer Lehrsatz gilt auch für $n=-1$, jetzt aber unendl. Reihe

2.5 Quadratwurzel

Ansatz: $(1+x)^{1/2} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

Koeffizientenvergleich in $(1+x)^{1/2}(1+x)^{1/2} = 1+x$ (Newton 1665):

$$1+x = (1+c_1x+c_2x^2+\dots)(1+c_1x+c_2x^2+\dots)$$
$$= 1 + \underbrace{2c_1}_{1}x + \underbrace{(2c_2+c_1^2)}_{0}x^2 + \underbrace{(2c_3+2c_1c_2)}_{0}x^3 + \dots$$

ergibt $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{8}$, $c_3 = \frac{1}{16}$, ...

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

beachte $\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1}$, $-\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{16} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$

d.h., binomischer Lehrsatz gilt augenscheinlich auch für $n=\frac{1}{2}$

2.6 Verallgemeinerter binomischer Lehrsatz von Newton (1666)

Satz: Für jedes rationale a gilt für $|x|<1$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \dots$$

Newtons Idee: interpoliere $(1+x)^0, (1+x)^1, (1+x)^2, \dots$ zu Exponent a
muß dazu Koeffizienten im binomischen Lehrsatz interpolieren,
dies sind aber bereits Polynome in n, erhalte daher selben Ausdruck in a

strenger Beweis erst durch Abel (1826) (später in VL)

2.7.1828... Exponentialfunktion

Ausgangsbsp: Bevölkerung wächst jährlich um $\frac{1}{30}$, Zunahme nach 100 Jahr

$$\left(1+\frac{1}{30}\right)^{100}$$

Zinseszinsrechnung: 5% jährl. Zinsen, nach N Jahren

$$(1+0{,}05)^N$$

allg. $(1+\omega)^N$ mit ω klein, N groß

Euler' Zahl e : nehmen $\omega = \frac{1}{N}$

aus binom. Lehrsatz

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1 + \frac{N}{N} + \frac{N(N-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{N^3} + \dots$$

$$= 1 + 1 + \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)}{1\cdot 2} + \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

(N groß: $1-\frac{1}{N} \approx 1$)

Euler: lasse $N \to \infty$ in jedem Summand

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N \longrightarrow e := 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

! gefährliches Argument, weil auf unendlich viele Terme angewandt

ähnlicher "Beweis" gibt

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\dots+\frac{1}{N} \to 0+0+\dots+0 = 0$$

15.10.

Bem: $e = 2{,}718281828 45904\ldots$

$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{N!}$: $N = 10$ 8 Stellen von e

$N = 20$ 22 –"–

$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$:

$N = 10$	$2{,}594$	
20	$2{,}653$	
100	$2{,}7048$	gute Approximation nur für sehr große N

Potenzen von e: setzen $\omega = \frac{x}{N}$, wobei x feste (rationale) Zahl

wie oben: $\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \longrightarrow 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

andererseits: setze $M = \frac{N}{x}$

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = \left(1+\frac{1}{M}\right)^{Mx} = \Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{1}{M}\right)^M}_{\to e}\Bigg)^x \longrightarrow e^x$$

fassen zusammen:

Satz: (Euler 1748) Für $N \to \infty$ ist

$$\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \longrightarrow e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

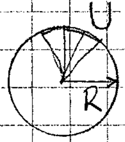
Bez. oft $\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots = e^x$

ist auch für irrationale x sinnvoll

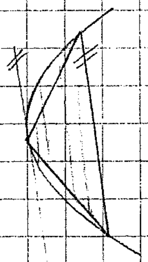
nehme das als Definition von e^x

3 Flächen und Logarithmen

Archimedes 280 - 212 v.C.

Kreis  Fläche $A = \frac{1}{2} R \cdot U$, $3\frac{10}{71} < \frac{U}{2R} < 3\frac{1}{7}$

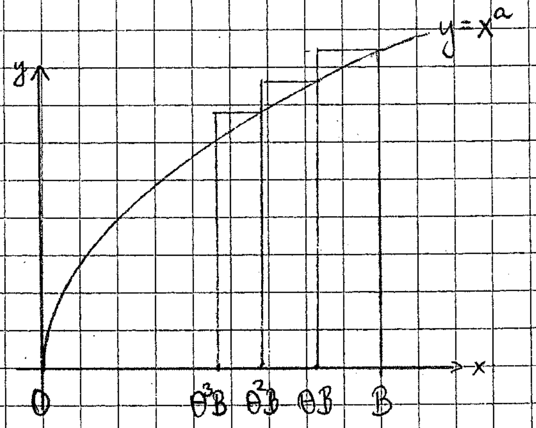
(96 - Eck)

Parabel  $A_{Par.} = \frac{4}{3} A_{\Delta}$

3.1 Fläche unter Kurve $y = x^a$ zwischen $x = 0$ und $x = B$

frühes 17. Jh. : Cavalieri, Fermat

Lösung nach Fermat (1636) :



wähle $\theta < 1$, θ nahe 1

unterteile durch geom. Folge

$\ldots, \theta^3 B, \theta^2 B, \theta B, B$

betrachte Rechtecke der Höhen

$\ldots, (\theta^2 B)^a, (\theta B)^a, B^a$

(> falls $a<0$)

Fläche $\lesssim$ Summe der Flächen der Rechtecke =

$$= B(1-\theta)\cdot B^a + \theta B(1-\theta)\cdot \theta^a B^a + \theta^2 B(1-\theta)\cdot\theta^{2a}B^a + \ldots$$

$$= B^{a+1}(1-\theta)\underbrace{\left(1+\theta^{a+1}+\theta^{2(a+1)}+\ldots\right)}_{\text{geom. Reihe}} =$$

$$= B^{a+1}\frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}} ,$$ sofern $\theta^{a+1} < 1$, d.h. $\underline{a > -1}$

schreibe $\theta = 1-\varepsilon$ mit kleinem $\varepsilon > 0$

$$\theta^{a+1} = (1-\varepsilon)^{a+1} = 1 - (a+1)\varepsilon + b\varepsilon^2 + \dots \qquad \left(b = \frac{a(a+1)}{2}\right)$$

nach (verallg.) binomischem Lehrsatz

falls a nicht ganz

daher
$$\frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}} = \frac{\varepsilon}{(a+1)\varepsilon + b\varepsilon^2 + \dots} \longrightarrow \frac{1}{a+1} \quad \text{für } \varepsilon \to 0$$

d.h. $\theta \to 1$

betrachte nun ebenso Rechtecke unterhalb der Kurve, der Höhen

$\dots, (\theta^3 B)^a, (\theta^2 B)^a, (\theta B)^a$

(< falls $a<0$)

Fläche $>$ Summe der Flächen dieser Rechtecke

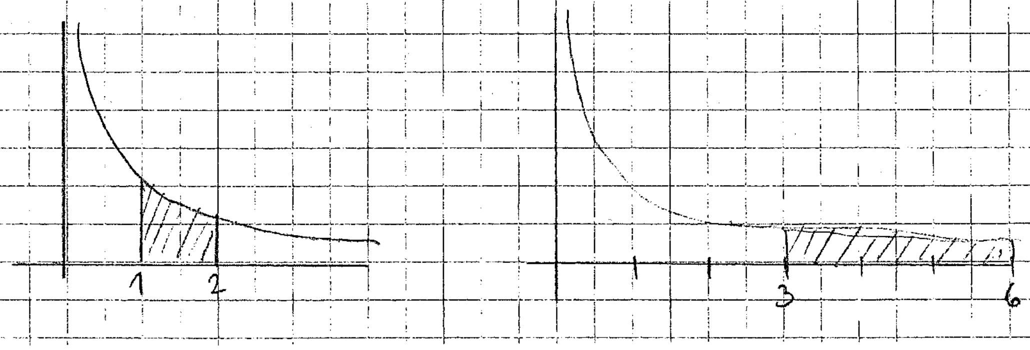
$$= \theta^a \cdot B^{a+1} \frac{1-\theta}{1-\theta^{a+1}} \longrightarrow \frac{B^{a+1}}{a+1} \quad \text{für } \theta \to 1$$

erhalten somit

Satz: Die Fläche unter der Kurve $y = x^a$ zwischen $x=0$ und $x=B$ ist
$$A = \frac{B^{a+1}}{a+1}, \quad \text{falls } a > -1$$

3.2 Hyperbelfläche und natürlicher Logarithmus

$y = \frac{1}{x}$ Hyperbel



or. Fläche zwischen 1 und a : $A(1 \to a) = A(b \to ab)$ für jedes $b > 0$

(in x-Richtung um Faktor b gestreckt,
y gestaucht)

$$A(1 \to ab) = A(1 \to b) + A(b \to ab)$$
$$= A(1 \to b) + A(1 \to a)$$

definiere $\ln(a) = A(1 \to a)$, haben (G. St. Vincent 1647)

$$\underline{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)} \quad \text{für } a, b > 0 \qquad (*)$$

$\ln(a)$ heißt <u>natürlicher Logarithmus</u> von a. (oft auch $\log a$ geschrieben)

(Jede Funktion mit Eig. (*) (Produkt geht über in Summe) heißt Logarithmus).

beachte: aus (*) folgt $\ln(1) = \ln 1 + \ln 1 \Rightarrow \ln 1 = 0$

$\ln \frac{1}{a} = -\ln a$ wegen $\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln 1 = 0$

$$\left.\begin{aligned} \ln a^n &= n \ln a && \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \\ \ln a^x &= x \ln a && \text{für jedes rationale } x \end{aligned}\right\} \text{Ü}$$

3.3 Reihenentwicklungen von ln

$\ln(1+a)$ = Fläche unter $y = \frac{1}{x}$ zwischen 1 und $1+a$

= —"— $y = \frac{1}{1+x}$ 0 a

geom. Reihe $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad (|x| < 1)$

$\ln(1+a)$ = Fläche unter $y=1$ zwischen 0 und a

− 〃 $y = x$ 〃

+ $y = x^2$ 〃

− $y = x^3$ 〃

± $\vdots$

$$\overset{\S 3.1}{=} \quad a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots$$

⚠ Vertauschen von Integration und unendl. Summe!

damit ergibt sich Reihe von Mercator (1668) (schreibe x statt a)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots , \quad |x|<1$$

$x = +1$: $\quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$

für praktische Rechnung unbrauchbar: für 10 Dezimalstellen von $\ln 2$ brauche 10^{10} Terme!

$x = -1$: $\quad$ "$\ln 0$" $= -\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)}_{\text{"harmonische Reihe"}}$

$\quad \parallel$

$-\infty$

$$\Big(\ln \underbrace{2^{-n}}_{\to 0} = -n \ln 2 \to -\infty \quad \text{für } n \to \infty \Big)$$

Divergenz der harmonischen Reihe schon Oresme im 14. Jh. bekannt

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \dots}_{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

ersetze x durch $-x$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

subtrahiere und erhalte Reihe von Gregory (1668)

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right), \quad |x|<1$$

Bsp: $\ln 2$: $\quad 2 = \frac{1+x}{1-x}$ für $x = \frac{1}{3}$

$$\ln 2 = \ln \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \dots\right)$$

$$= 0.69314718\dots$$

bei 10 Termen der Reihe 10 Dezimalstellen richtig

$\ln 3$: $\quad 3 = \frac{3}{2}\cdot 2 \qquad \frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x}$ für $x = \frac{1}{5}$

$$\ln 3 = \ln\frac{3}{2} + \ln 2 = \ln\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} + \ln 2$$

oder (besser) $\quad 3 = \frac{3}{4}\cdot 4$

$$\ln 3 = \ln\frac{3}{4} + 2\ln 2 = -\ln\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} + 2\ln 2$$

3.4 Logarithmus und Exponentialfunktion

Satz: Seien x, y reell, $y > 0$. Es ist

$$y = e^x \iff x = \ln y$$

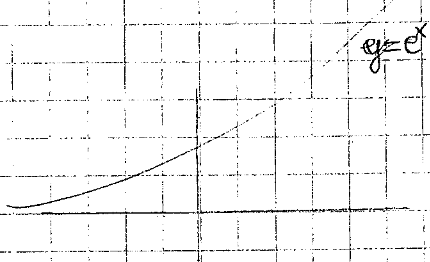
($\ln$ ist Umkehrfunktion von exp.)

Beweis: ($\Rightarrow$) $\ln\left(1+\frac{x}{N}\right)^N = N\ln\left(1+\frac{x}{N}\right) =$

$$= N\left(\frac{x}{N} - \frac{x^2}{2N^2} + \ldots\right) \to x$$

! daher $\ln e^x = x$

($\Leftarrow$) Sei $y > 0$ gegeben.



Wegen $e^x \to 0$ für $x \to -\infty$ und

$e^x \to +\infty$ $\quad$ $x \to +\infty$

gibt es ein a mit $y = e^a$ $\quad$! (Zwischenwertsatz) anschaulich klar

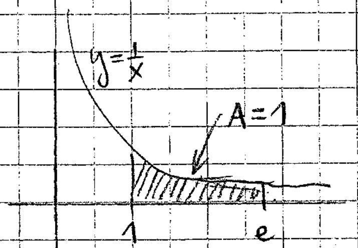
wissen $\ln e^a = a$ und daher $e^{\ln \underset{y}{e^a}} = \underset{y}{e^a}$,

d.h. $e^{\ln y} = y$ $\square$

insbes. $\ln e = 1$

$\quad\quad\; \|$

$\quad A(1 \to e)$



geom. Interpretation von e

3.5 Logarithmen zu anderen Basen

Sei $a > 0$ vorgegeben ("Basis"), insbes. $a = 10$ (Briggs Anf. 17. Jh.)

def. $\log_a y = x$, falls $y = a^x$

wissen $a = e^{\ln a}$, daher $y = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{\ln a \cdot x}$

somit $\ln y = \ln a \cdot x$, daher $\quad$ (kann das als Def. von a^x für irrationale x nehmen)

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

4 Trigonometrische Funktionen

4.1 Winkelfunktionen

Winkelmessung : Unterteilung des Kreises in $360°$ in Babylonien

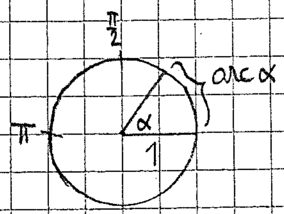
Ptolemaios 150 n.C. $57° \; 31' \; 27''$

partes minutae secundae

partes minutae primae

natürliches Winkelmaß : Bogenmaß

Länge des Kreisbogens vom Radius 1



Bogenlänge des Halbkreises : $\pi = 3.141592653\ldots$

Bez. erstmals bei W. Jones 1706 für "periphery"

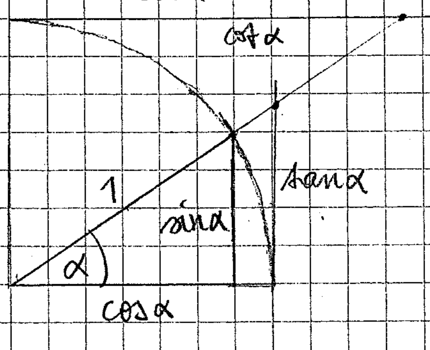
seit Euler allgemein übliche Bez.

Sei $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Betrachte rechtwinkliges Dreieck mit Winkel α und Hypotenuse der Länge 1. Definiere

$\sin\alpha$ = Länge der dem Winkel α gegenüberliegenden Seite

$\cos\alpha$ = -"- anliegenden -"-

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$



anders : Einem (beliebigen reellen) Winkel α ist genau ein Punkt am Einheitskreis zugeordnet (Bild). Die Koordinaten dieses Punktes sind

$x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$.

aus Bild unmittelbar einsichtig:

$$\sin 0 = 0 \,, \quad \cos 0 = 1$$
$$\sin \tfrac{\pi}{2} = 1 \,, \quad \cos \tfrac{\pi}{2} = 0$$
$$\sin \pi = 0 \,, \quad \cos \pi = -1$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \,, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \,, \quad \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$$
$$\sin\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \,, \quad \cos\left(\alpha+\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$$

sin, cos periodisch mit Periode 2π : $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\alpha+2\pi) = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\,\alpha$

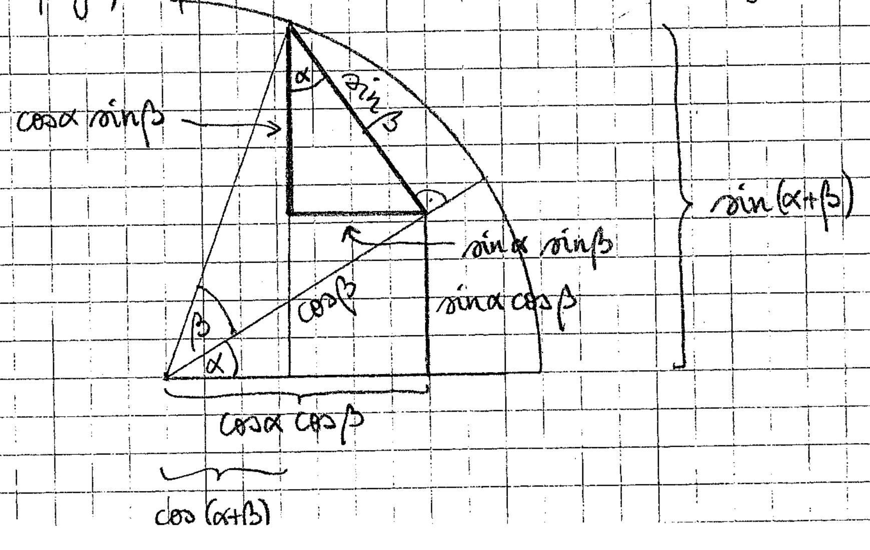
tan " " π

4.2 Additionstheorem und Formeln von de Moivre

Satz: (Ptolemaios 150, Regiomontanus 1464)

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Beweis: Für $0 \le \alpha, \beta \le \frac{\pi}{2}$ aus den drei rechtwinkligen Dreiecken wie folgt, für alle anderen Winkel aus obigen Verschiebungsrelationen



setzen $\alpha = x$, $\beta = nx$:

$$\sin(n+1)x = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx$$

$$\cos(n+1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx$$

erhalte so:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x$$

$$\sin 4x = 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x$$

entdecken hier wieder Pascal' Dreieck (Beweis durch Induktion: Ü)

erhalten daher mit §2.2 die Formeln von de Moivre (1730):

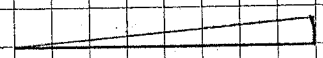
$$\cos nx = \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 x \cos^{n-2} x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots$$

$$\sin nx = n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x \cos^{n-3} x + \frac{n(n-1) \cdots (n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots$$

4.3 Reihenentwicklungen von sin und cos

oben alles aus Additionstheorem hergeleitet, verwenden nun

noch $\sin x \approx x$ für kleine $|x|$,



oder genauer

$$\frac{\sin x}{x} \longrightarrow 1 \quad \text{für } x \to 0 .$$

verwenden selbe Idee wie bei Herleitung der Exponentialfunktion in Formeln von de Moivre (nach Jac. Bernoulli und Euler):

$$\cos x = \cos n\frac{x}{n} = \cos^n \frac{x}{n} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \sin^2\frac{x}{n} \cos^{n-2}\frac{x}{n}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \sin^4\frac{x}{n} \cos^{n-4}\frac{x}{n} - \ldots$$

betrachten einzelne Terme für $n \to \infty$:

$\cos^n\left(\frac{x}{n}\right) \to 1$, denn:

$$1 \geq \cos^n\frac{x}{n} = \left(1 - \sin^2\frac{x}{n}\right)^{n/2} \geq \quad \text{(Bernoulli'Ungl., Ü9)}$$

$$1 - \frac{n}{2}\sin^2\frac{x}{n} = 1 - \underbrace{\frac{n}{2}\frac{x^2}{n^2}}_{\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{x/n}\right)^2}_{\to 1} \to 1$$

$$\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\sin^2\frac{x}{n}\cos^{n-2}\frac{x}{n} = \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{n^2}\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2 \cos^{n-2}\frac{x}{n} \to \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \underbrace{\sin^4\frac{x}{n}}_{\approx\left(\frac{x}{n}\right)^4} \underbrace{\cos^{n-4}\frac{x}{n}}_{\approx 1} \to \frac{x^4}{4!}$$

usw.

erhalten somit (bis auf Rechtfertigung der gliedweisen Grenzwertnahme) $\underset{0}{!}$

Satz: (Newton 1669, Leibniz 1691, Jac. Bernoulli 1702)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \ldots$$

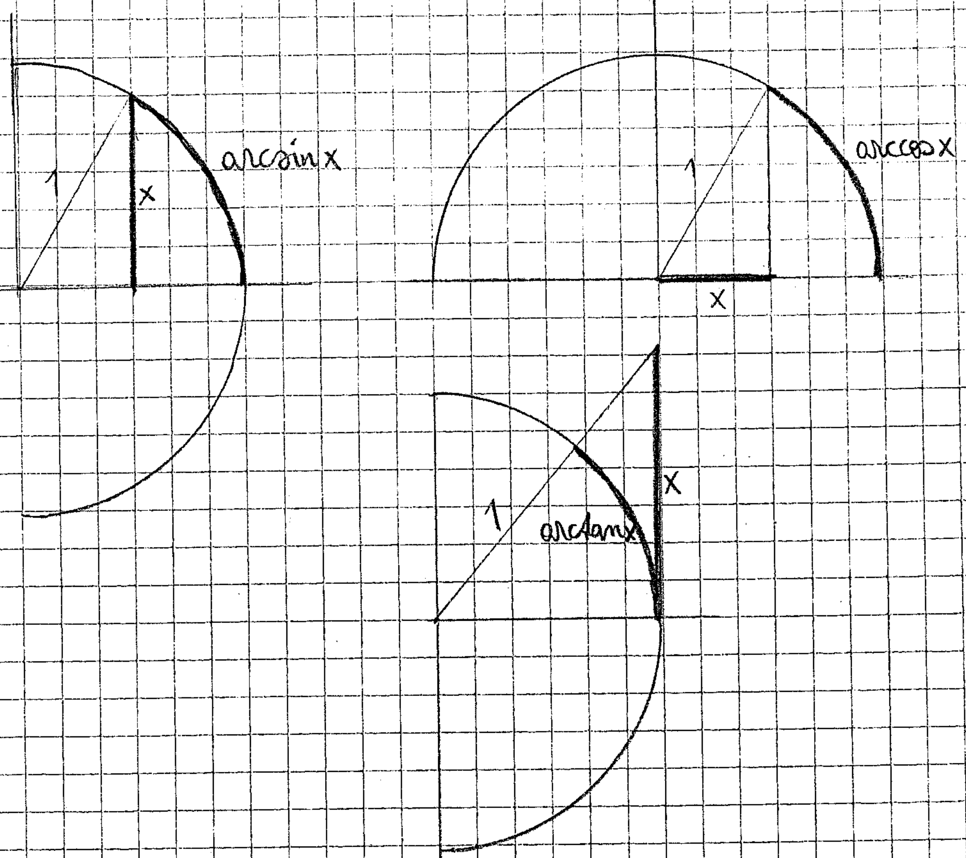
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \ldots$$

22.10.

4.4 Inverse trigonometrische Funktionen

Problem: bestimme Bogenmaß des Winkels aus geg. Sinus, Cosinus oder Tangens

Bild:



Wegen Periodizität der trigonometrischen Funktionen gibt es zu geg. x viele Werte y mit $\sin y = x$ bzw. $\cos y = x$ bzw. $\tan y = x$

Für die sogenannten "Hauptzweige" gilt

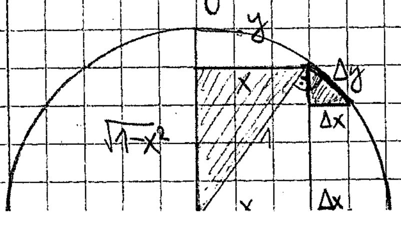
$$y = \arcsin x \iff x = \sin y \quad \text{für } -1 \le x \le 1,\ -\tfrac{\pi}{2} \le y \le \tfrac{\pi}{2}$$

$$y = \arccos x \iff x = \cos y \quad -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$$

$$y = \arctan x \iff x = \tan y \quad -\infty < x < +\infty,\ -\tfrac{\pi}{2} < y < \tfrac{\pi}{2}$$

Reihe für arcsin x

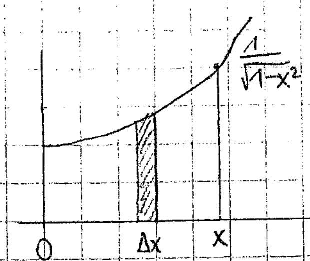
Herleitung nach Newton (1669): Sei x geg., suchen $y = \arcsin x$



Wenn x um Δx zunimmt, dann y um

$$\Delta y \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}},$$

(weil schraffierte Dreiecke ähnlich)



daher:

arcsin x = gesamte Bogenlänge y =

= Fläche unter Funktion $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ zw. 0 und x

nach Newton's binom. Lehrsatz haben

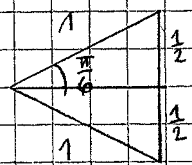
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots, \quad |x|<1$$

somit nach §3.1 (wie bei Mercators Reihe für ln x)

durch Aufsummieren der Flächen unter den einzelnen Termen:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots, \quad |x|<$$

Bsp: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$



daher

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5\cdot 2^5} + \dots$$

gibt Möglichkeit der Berechnung von π

Bemerkung: Archimedes ~240 v.C. Umfang des 6, 12, 24, 48, 96-Ecks ⇒

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

A. van Roomen 1580 : 20 Dezimalen nach jahrelanger Rechnung mit Methode des Archimedes

L. van Ceulen 1616 : 35 $(n = 6\cdot 2^{60})$

Gregory 1671, Leibniz 1682: Reihe für arctan

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad , \quad |x| < 1$$

(vgl. Gregorys Reihe für $\ln \frac{1+x}{1-x}$; wird später erklärt; §5).

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$, für $x = 1$ oben eingesetzt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

(schön, aber: für 10 Stellen von π brauche 10^{10} Terme)

$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots \right)$

(für 10 Stellen $\approx$ 20 Terme)

Machin ~ 1700 findet

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} ,$$

berechnet damit über 100 Stellen von π ($\approx$ 72 Terme) +20

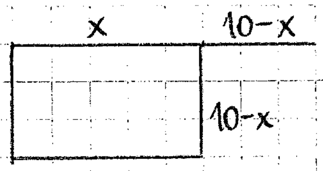
heute: π auf viele Millionen Stellen bekannt

Algorithmen zur Berechnung von π als Testprogramme für neue ("Benchmark") Computer

5. Komplexe Zahlen und Funktionen

5.1 Komplexe Zahlen

Cardano 1545: Teile Seite der Länge 10 in zwei Teile, sodaß das Rechteck mit diesen Seiten die Fläche 40 hat!



Problem hat keine Lösung.

$$x(10-x) = 40$$
$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

aber: Algebra gibt uns Lösung:

$$x_1, x_2 = 5 \pm \sqrt{25-40}$$
$$= 5 \pm \sqrt{-15}$$ ("idea imaginaberis $\sqrt{-15}$")

wenn auch für obige Aufgabe nutzlos, so immerhin

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

in folgenden Jh. "imaginäre" Lösungen algebraischer Gleichungen mehr und mehr in Gebrauch

Euler: virtuos verwendet

bez. $i = \sqrt{-1}$ "imaginäre Einheit"

damit $5+\sqrt{-15} = 5+\sqrt{15}\cdot\sqrt{-1} = 5+i\sqrt{15}$

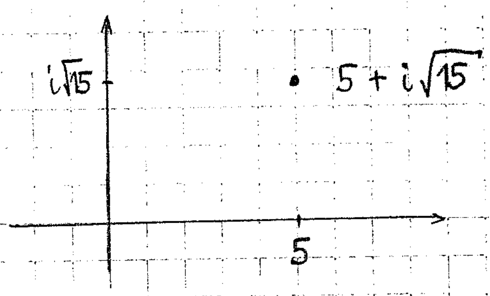
<u>Komplexe Zahlen</u> sind von der Form

$$c = a + ib$$

wobei $a = \mathrm{Re}(c)$ Realteil

$b = \mathrm{Im}(c)$ Imaginärteil (a, b reelle Zahlen)

Gauß, Argand ~1800: interpretiere $a+ib$ als Punkt (a,b) in der <u>komplexen Zahlenebene</u>



<u>Komplexe Operationen</u>

verwenden $i^2=-1$ und übliche Rechenregeln für reelle Zahlen

$$c = a+ib\,, \qquad w = u+iv$$

<u>Summe</u>, <u>Differenz</u>: $\quad c \pm w = (a \pm u) + i(b \pm v)$

<u>Produkt</u>: $\quad cw = (a+ib)(u+iv) = au + ibu + iav + \underbrace{i^2}_{-1} bv$

$$= (au - bv) + i\,(bu + av)$$

Produkt von $c = a+ib$ mit der <u>konjugiert komplexen</u> Zahl

$$\overline{c} = a - ib$$

ergibt
$$c\overline{c} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

(beachte $c\overline{c} \neq 0$, falls $c \neq 0$)

<u>Quotient</u>: für $c \neq 0$ ist

$$\frac{w}{c} = \frac{w\cdot\overline{c}}{c\cdot\overline{c}} = \frac{au+bv}{a^2+b^2} + i\,\frac{bu-av}{a^2+b^2}$$

5.2 Euler' Formel

definieren e^{ix} durch Reihe von Satz aus §2.7 (mit ix statt x)
und verwenden $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ...
trennen Real- und Imaginärteil:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

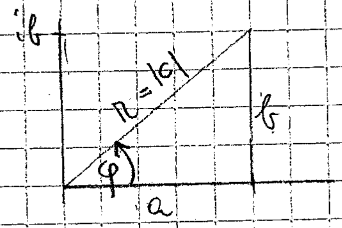
somit (Euler ~ 1740):

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

haben
$$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i\sin(x+y) =$$
$$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$$
$$= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = e^{ix} \cdot e^{iy}$$

also:
$$\underline{e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}}$$

5.3 Polarkoordinaten



Sei $c = a + ib$ komplexe Zahl

$r = |c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ heißt **Betrag** von c.

damit $c = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$ $\quad \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$

Es gibt φ (eindeutig bis auf Vielfache von 2π) mit

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} \qquad \left(\tan\varphi = \frac{b}{a}\right)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{falls } \cos\varphi \geq 0 \\ \pi + \arctan\frac{b}{a} & \phantom{\text{falls } \cos\varphi} < \end{cases}$$

φ heißt <u>Argument</u> von c : $\varphi = \arg(c)$

damit: $\quad c = a + ib = r\cos\varphi + i r\sin\varphi = r e^{i\varphi}$

beachte $\quad \bar{c} = r\cos\varphi - i r\sin\varphi = r\cos(-\varphi) + i r\sin(-\varphi) = r e^{-i\varphi}$

für $c = r e^{i\varphi}$, $w = s e^{i\theta}$:

$$cw = rs\, e^{i\varphi} e^{i\theta} = rs \cdot e^{i(\varphi+\theta)}$$

(Beträge multiplizieren sich, Argumente addieren sich)

$$\frac{w}{c} = \frac{w\bar{c}}{c\bar{c}} = \frac{w\bar{c}}{r^2} = \frac{s}{r}\, e^{i(\theta-\varphi)}$$

27.10.

5.4 Exponentialfunktion und Logarithmus im Komplexen

Erweiterung der Exp.funktion auf komplexe Zahlen $c = a + ib$ durch

$$e^c = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$$

damit wieder $\quad e^c e^w = e^{c+w}$

Logarithmus: $\quad c = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi + 2k\pi)} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$= e^{\ln(r)}\, e^{i(\varphi+2k\pi)} = e^{\ln(r) + i(\varphi + 2k\pi)}$$

def. $\ln(c)$ so, daß $c = e^{\ln(c)}$, also

$$\ln(c) := \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi) \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

unendlich viele Werte

Hauptzweig: $-\pi < \operatorname{Im} \ln(c) \leq \pi$

5.5 Noch einmal: trigonometrische Funktionen

$$\left.\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \sin x \end{aligned}\right\} + \quad \Big\} -$$

daraus

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\tan x = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

de Moivre' Formel wird

$$\cos nx + i \sin nx = e^{inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n$$

(ist hier kein neuer Beweis, weil Euler' Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ auf Reihenentwicklungen beruhte, diese auf de Moivre' Formel

Inverse trigonometrische Funktionen:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \text{setze } u = e^{ix}$$

$y = \sin x$ bzw. $x = \arcsin y$

$$y = \frac{u - u^{-1}}{2i}$$

$$u - 2iy - u^{-1} = 0$$

$$u^2 - 2iy\cdot u - 1 = 0$$

$$e^{ix} = u = iy \underset{(-)}{+} \sqrt{-y^2+1}$$

$$\arcsin y = x = \frac{1}{i} \ln\left(iy + \sqrt{1-y^2}\right)$$

ebenso: $\arccos y = -i \ln\left(y + i\sqrt{1-y^2}\right)$

$$\arctan x = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+x}{i-x}\right) = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix}$$

Bem: hatten Gregory's Reihe: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$

$$\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) = 2\left(ix + \frac{(ix)^3}{3} + \dots\right)$$

$$= 2i\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots\right)$$

$$\arctan x = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$$

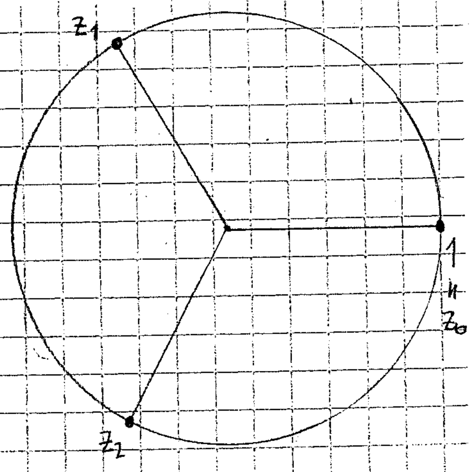
5.6 Einheitswurzeln

suchen komplexe Lösungen der Gl. $\underline{z^n = 1}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$

Bsp: $n = 3$: $z_0 = 1$

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \quad : \quad z_1^3 = e^{3i\frac{2\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1$$

$$z_2 = e^{i2\cdot\frac{2\pi}{3}}$$



allg: Gl. $z^n = 1$ hat n unterschiedliche Lösungen

$$z_k = e^{ik\frac{2\pi}{n}} \quad , \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

$$\left(k = n \text{ selbe wie } k=0 \text{ wg. } e^{2\pi i} = 1 \right)$$

"n-te Einheitswurzeln"

Bem: Gl. $w^n = c$ mit $c = re^{i\varphi}$ hat Lösungen $w_k = r^{1/n} e^{i\varphi/n} \cdot z_k$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$

Abspalten von Linearfaktoren: Sei $p(z)$ Polynom vom Grad $n \geq 1$ und c komplexe Zahl. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $q(z)$ vom Grad $n-1$ mit

$$p(z) = (z-c)\,q(z) + d \quad , \qquad d = p(c)$$

(Division mit Rest; Beweis leicht durch Induktion über n)

speziell: $p(c) = 0 \implies p(z) = (z-c)\,q(z)$

$$z^n - 1 = (z - z_0)\,\underbrace{q_{n-1}(z)}_{\substack{\text{Grad } n-1, \\ \text{hat Nullstelle } z_1}} = (z-z_0)(z-z_1)\,\underbrace{q_{n-2}(z)}_{\substack{\text{Grad } n-2, \\ \text{hat Nst. } z_2}}$$

$$= \dots = (z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_{n-1})\,\underbrace{q_0}_{\text{Grad } 0,\ \text{komplexe Zahl}}$$

Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich von z^n gibt $q_0 = 1$.

damit Faktorisierung

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\dots\left(z - e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}\right)$$

für n ungerade: $$z^n - 1 = (z-1)\left(z - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{2\pi}{n}}\right)\dots$$
$$\dots\left(z - e^{i\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-i\frac{n-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}}\right)$$

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

$$\frac{p(z)}{z-c} = a_n z^{n-1} + \frac{p_1(z)}{z-c} \quad , \qquad \deg p_1 \le \deg p - 1$$

$$\frac{p(z)}{z-c} = \frac{\underline{a_n z^n - a_n z^{n-1}} c + \overbrace{a_n z^{n-1} c + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}^{p_1(z)}}{z-c}$$

$$= \frac{a_n z^{n-1}(z-c)}{z-c} + \frac{p_1(z)}{z-c} \quad , \qquad \deg p_1 \le n-1$$

$$= a_n z^{n-1} + \frac{p_1(z)}{z-c}$$

bzw.

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z - e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right)\left(z - e^{-ik\frac{2\pi}{n}}\right)$$

$$= (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2\left(\cos k\frac{2\pi}{n}\right)\cdot z + 1\right)$$

Bem: ersetze $z \to \frac{z}{a}$, multipliziere mit a^n:

$$z^n - a^n = (z-a)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2az\cos k\frac{2\pi}{n} + a^2\right)$$

5.7 Euler' Produktformel für Sinus

wissen $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$

aus §2.7: $\left(1 \pm \frac{ix}{N}\right)^N \longrightarrow e^{\pm ix}$ für $N \to \infty$

schreiben i.f. $y = ix$

Ende §5.6: $z = 1+\frac{y}{N}$, $a = 1-\frac{y}{N}$ (N ungerade)

$$\left(1+\frac{y}{N}\right)^N - \left(1-\frac{y}{N}\right)^N =$$

$$= \frac{2y}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(\left(1+\frac{y}{N}\right)^2 - 2\left(1+\frac{y}{N}\right)\left(1-\frac{y}{N}\right)\cos k\frac{2\pi}{N} + \left(1-\frac{y}{N}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2y}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(2 + 2\frac{y^2}{N^2} - 2\left(1-\frac{y^2}{N^2}\right)\cos k\frac{2\pi}{N}\right)$$

$$= \frac{2y}{N}\prod_{k=1}^{(N-1)/2} 2\left(\left(1-\cos k\frac{2\pi}{N}\right) + \frac{y^2}{N^2}\left(1+\cos k\frac{2\pi}{N}\right)\right)$$

$$= C_N\, y\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(1 + \frac{y^2}{N^2}\,\frac{1+\cos k\frac{2\pi}{N}}{1-\cos k\frac{2\pi}{N}}\right)$$ mit $C_N = \frac{2}{N}\prod_k 2\left(1-\cos k\frac{2\pi}{N}\right.$

Koeffizientenvergleich von y^1 ergibt $C_N = 2$

lasse $N \to \infty$ in jedem einzelnen Faktor:

$$\left(1 + \frac{y^2}{N^2} \, \frac{1 + \cos k\frac{2\pi}{N}}{1 - \cos k\frac{2\pi}{N}}\right) \longrightarrow 1 + \frac{y^2}{k^2\pi^2} \qquad (N \to \infty)$$

denn: $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$

$$N^2\left(1 - \cos k\frac{2\pi}{N}\right) = N^2\left(\frac{1}{2}k^2\left(\frac{2\pi}{N}\right)^2 + \dots\right) \to \frac{1}{2}k^2 4\pi^2 = 2k^2\pi^2$$

erhalte so (bis auf Rechtfertigung der gliedweisen Grenzwertnahme!)

Satz (Euler 1748)

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\dots$$

$$= x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

betrachten Koeffizienten von x^3: $\left(\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)$

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \frac{1}{16\pi^2} - \dots$$

d.h. $\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, somit:

Folgerung: (Euler) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

setzen nun $x = \frac{\pi}{2}$ in obigem Satz, erhalten

$$\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4\cdot 4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4\cdot 9}\right)\cdots$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\cdots$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{6} \cdots$$

und somit

<u>Folgerung</u>: (Wallis 1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdot\frac{10\cdot 10}{9\cdot 11}\cdot\cdots$$

hatten Differential- und Integralrechnung i.w. bis Euler (1707 – 1783)

weitere wichtige Bereiche der Analysis im 18. Jh. (bis heute!):

- Variationsrechnung: suche Kurve $y(x)$ mit $\int_a^b F(x, y, y')\,dx = \min$!
- Differentialgleichungen: $y' = f(x,y)$, $y'' = f(x,y,y')$
- Anwendungen in der Physik (Mechanik: Bewegung von Körpern und Flüssigkeiten)

Q.E.I. quod erat inveniendum (was zu finden war)

stand bisher im Vordergrund gegenüber

Q.E.D. quod erat demonstrandum (was zu beweisen war)

zentrale Gegenstände des "Calculus" bzw. der "Infinitesimalrechnung"

Reihe: unendliche Summe

Ableitung: Quotient unendlich kleiner Größen (Leibniz)

Integral: unendliche Summe unendlich kleiner Größen (Leibniz)

seit Ende des 18. Jh. zunehmend Bedürfnis nach Klärung der Grundlagen (Lagrange 1797, Bolzano 1817)

Cauchy 1821 Cours d'analyse ("la rigueur dont je m'étais fait une loi")

Reihe, Ableitung, Integral ? Grenzwert

verbleibende Lücken erforderten

- Begriff der gleichmäßigen Konvergenz: Weierstraß 1841, klärt z.B. termweise Differentiation und Integration von unendl. Reihen
- Klärung des Begriffs der reellen Zahl ~ 1870 ($\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$?)

(A.L. Cauchy 1789 – 1857, K. Weierstraß 1815 – 1897)