Übungsblatt 14

Aufgabe 79

Zeigen Sie, dass für $|x| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n = \frac{1}{(1-x)^3}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe mit sich selbst.

Beweis. Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ und konvergiert für $|x| < 1$ gegen $\frac{1}{1-x}$. Allgemein berechnet man das Cauchy-Produkt zweier Potenzreihen mit

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)}_{=:c_n} x^n$$

Wir multiplizieren die geometrische Reihe mit sich selbst, d. h. wir berechnen

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)$$

Hier sind die Koeffizienten alle gleich 1, $a_n = b_n = 1$ für alle n undd damit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1\,.$$

Somit ist

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\,.$$

Aus dem Satz aus §5.2 folgt daraus auch, dass der Wert der Reihe gleich dem Produkt der Werte der multiplizierten Reihen ist, also dass

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Für die zweite Reihe gehen wir analog vor:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

und die Reihen für beide Faktoren auf der rechten Seite sind bekannt. Wir berechnen also das Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)\,.$$

Nun ist $a_n = n+1$ und $b_n = 1$ und damit

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\cdot 1 = \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

Daraus folgt die Behauptung mit derselben Argumentation wie zuvor. □

Aufgabe 80

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{2^j} x^j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 x^{j^2} .$$

Beweis. Die Koeffizienten sind $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Wir berechnen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} .$$

Somit ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = 2$. Alternativ kann man den Konvergenzradius hier auch mit der Formel

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^2 \cdot 2^{n+1}}{2^n (n+1)^2} = 2 \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$$

berechnen.
Bei der zweiten Reihe stellen wir zunächst fest, dass diese nicht in der Form ist, wie man eine Potenzreihe definiert hat, also mit Summanden der Form $a_n x^n$. Dies können wir aber folgendermaßen erreichen:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n^2} &= x + 4x^4 + 9x^9 + \dots \\ &= 0x + x + 0x^2 + 0x^3 + 4x^4 + 0x^5 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \end{aligned}$$

wobei wir die Koeffizienten a_n definieren durch

$$a_n = \begin{cases} n\,, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere ist also

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}\,, & \text{falls } n \text{ eine Quadratzahl ist} \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Somit ist $\rho = 1$. Die aus dem Quotientenkriterium erhaltene Formel $\lim |a_n / a_{n+1}|$ funktioniert hier nicht, da viele der $a_n = 0$.

□

Aufgabe 81

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right| \le \frac{h^2}{6} \max_{x\in[x_0-h, x_0+h]} |f'''(x)| .$$

Hinweis: Taylor.

Beweis. Mithilfe der Taylor-Entwicklung und Restglied in Differentialform erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1)\,, \\ f(x_0-h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2) \end{aligned}$$

mit ξ_1 zwischen x_0 und x_0+h, ξ_2 zwischen x_0 und x_0-h. Setzen wir dies oben ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} &\Bigg|\frac{1}{2h}\Big(f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \\ &\quad -(f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(\xi_2))\Big) - f'(x_0)\Bigg| \\ &\qquad = \left|\frac{h^2}{12}f'''(\xi_1) + \frac{h^2}{12}f'''(\xi_2)\right| \\ &\qquad \le \frac{h^2}{12}\left(|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|\right) \\ &\qquad \le \frac{h^2}{12}\left(2\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|f'''(x)|\right) \\ &\qquad = \frac{h^2}{6}\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]}|f'''(x)| \end{aligned}$$

□

Aufgabe 82

Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ so, dass $|\exp(x) - p(x)| < 10^{-2}$ für alle $x \in [-1,1]$.

Lösung. Allgemein bietet sich zur Approximation von Funktionen immer die Taylor-Entwicklung an. Die Taylorreihe der Exponentialfunktion haben wir direkt aus ihrer Definition

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\,,$$

denn aufgrund des Identitätssatzes kann die Taylor-Reihe nicht anders aussehen. Das n-te Taylorpolynom ist nun

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k\,.$$

Aus der Darstellung mit Restglied in Differentialform wissen wir, dass es für jedes $x \in [-1,1]$ ein ξ gibt, so dass

$$\exp(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\,.$$

Insbesondere ist also

$$
\begin{aligned}
|\exp(x) - T_n(x)| &= \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}\right| = \frac{\exp(\xi)|x|^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!} \quad \text{wegen } |x| \leq 1 \\
&\leq \frac{\exp(1)}{(n+1)!} \quad \text{wegen } |\xi| \leq 1 \text{ und Monotonie} \\
&\leq \frac{3}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

Der letzte Term ist nun genau dann kleinergleich $10^{-2} = \frac{1}{100}$, wenn $(n+1)! \geq 300$. Wegen $6! = 720$ ist dies für $n = 5$ erfüllt. Somit ist $p(x) = T_5(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{x^k}{k!}$ ein Polynom mit $|\exp(x) - p(x)| \leq 10^{-2}$ für alle $x \in [-1, 1]$. $\square$