Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.02.2014

15. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 85: Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{2^j} x^j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 x^{j^2} .$$

Aufgabe 86:

Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ so, daß $|\exp(x) - p(x)| < 10^{-2}$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 87: Verwenden Sie das Additionstheorem $\cos(3x) = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ um die Reihenentwicklung von $(\cos x)^3$ zu berechnen.

Berechnen Sie die dann Taylorreihe von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi/4$, einmal nach Definition und einmal unter Benutzung des Additionstheorems und bekannter Reihen.

Aufgabe 88:

Seien $f \in C^3(a, b)$, $x_0 \in (a, b)$ und der symmetrische Differenzenquotient $\mathrm{Diff}_{x_0}(h)$ aus Aufgabe 70 gegeben. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Diff}_{x_0}(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2),$$

d.h. es existieren Konstanten $h_0 > 0$ und $c > 0$ mit $|\mathrm{Diff}_{x_0}(h) - f'(x_0)| \le ch^2$ für alle $h \in (0, h_0)$.

Zeigen Sie dann, daß für $f \in C^4(a, b)$

$$\frac{f(x_0 + h) - 2f(x) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Hinweis: Taylor.

Aufgabe 89: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar auf $[0, \infty)$ und ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f uneigentlich integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist und $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$.

Aufgabe 90: Untersuchen Sie die fogenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx\,, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sin\frac{1}{x}\, dx\,, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,, \quad \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx\,.$$

Bearbeitung freiwillig und ggf. als sinnvolle Vorbereitung für die Nachklausur.