Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich Tübingen, den 27.01.2014

14. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 79: Seien die Funktionen $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x) \, .$$

Aufgabe 80: Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion für die Funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$, $h(x) = \frac{x}{x^2-6x+13}$, $u(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(2x)}$, und $v(x) = \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}$.

Aufgabe 81: Berechnen Sie $\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx$ durch partielle Integration. Verwenden Sie dann die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in $x^x = e^{x \ln x}$, um zu zeigen (Bernoulli 1697):

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \ldots \, .$$

Aufgabe 82: Sei $f_n^{\{k\}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $k = 0, 1, 2$ gegeben durch

$$f_n^{\{k\}}(x) = \frac{n^k x}{(1 + n^2 x^2)^2} \, .$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{\{k\}}(x)$ für $x \in [0,1]$ und den Maximalwert von $f_n^{\{k\}}$. Untersuchen Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{\{k\}}(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{\{k\}}(x)dx \ \ ?$$

Aufgabe 83: Finden Sie den größten Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(nx)$ und zeigen Sie, dass f differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

Aufgabe 84: Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

auf dem Intervall $[0, b]$ mit $0 < b < 1$ termweise integriert werden darf. Sie erhalten so die Arcustangens–Reihe.

Abgabe in der Vorlesungspause am 03.02.2014.
Besprechung in den Übungen vom 05.02.-07.02.2014.