Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.01.2014

13. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 73: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)|dx$$

Aufgabe 74:

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $2\int_0^1 f(x)dx = 1$. Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in (0,1)$ mit $f(c) = c$.

Aufgabe 75:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, daß die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, stetig auf $[a,b]$ ist.

Aufgabe 76: Berechnen Sie die Integrale

$$\int x^3 e^{-x^2} dx \,, \int e^{\alpha x} \cos \beta x \; dx \,, \; \int x^{10} \ln(x) \; dx \,,$$

sowie die Integrale

$$\int \frac{x \; dx}{\sqrt{9-x^2}} \,, \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} \,, \int \arccos x \; dx \,.$$

Aufgabe 77: Zeigen Sie durch wiederholte partielle Integration, dass für nichtnegative ganze Exponenten m, n

$$\int_a^b \frac{(b-x)^m}{m!} \frac{(x-a)^n}{n!} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \,.$$

Insbesondere ist

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \,.$$

Aufgabe 78: Zeigen Sie, daß für positive ganze Zahlen n

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \; dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x \; dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} \,.$$

Abgabe in der Vorlesungspause am 27.01.2014.
Besprechung in den Übungen vom 29.01.-31.01.2014.