Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 13.01.2014

12. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 67: Bestimmen Sie die 50. Ableitungen der Funktionen

$$f(x) = x^2 e^{-x},$$
$$g(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Hinweis: Aufgabe 60.

Aufgabe 68:

Seien $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$. Zeigen Sie: Wenn $a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x \geq n$ für alle reellen x, dann ist $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) = a_1^x + a_2^x + \ldots + a_n^x$.

Aufgabe 69: Zeigen Sie, daß $\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}$ für alle $x \geq 0$.

Aufgabe 70: Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein Gebiet und $f : A \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Weiter sei für $x_0 \in A$

$$\mathrm{Diff}_{x_0}(h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Zeigen Sie, daß $\lim_{h \to 0} \mathrm{Diff}_{x_0}(h) = f'(x_0)$.

Aufgabe 71: Untersuchen Sie, ob die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 1| & \text{für } |x| \geq 1 \\ e - e^{x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - \sqrt{|x^2 - 1|} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

Extremwerte besitzen.

Aufgabe 72:

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und mit stetiger und monoton steigender Ableitung auf $[0,1]$. Zeigen Sie: Wenn $f(0) = f(1) = 0$, dann $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [0,1]$.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Rolle an und untersuchen Sie die Extrema von f.

Abgabe in der Vorlesungspause am 20.01.2014.
Besprechung in den Übungen vom 22.01.-24.01.2014.