Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 08.01.2014

11. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 61: Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen $f(x) = e^{e^x}$, $g(x) = (e^e)^x$, $h(x) = 2x^2 e^x \sin x$, $u(x) = e^{\cos x}$, $v(x) = \cos(\ln(\tan(\sqrt{(x^2+1)})))$ und $w(x) = x^x$.

Aufgabe 62: Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen differenzierbar nach x sind, und berechnen Sie die Ableitungen, wenn diese existieren:

$$|x|\,, \qquad \ln|x|\,, \qquad A\cdot e^{-kt}\sin(\omega t)\,, \qquad x^{1/3}\,, \qquad x\sin\frac{1}{x}\,.$$

Betrachten Sie dann die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2\cos\frac{\pi}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist und berechnen Sie die Ableitung f'. Ist f' stetig oder differenzierbar?

Aufgabe 63: Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1+x^2) - px$ monoton steigend auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 64: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a,b). Zeigen Sie, daß dann $f \geq g$ auf $[a,b]$.

Beweisen Sie damit die Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung auf reelle Exponenten:

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \qquad \text{für } \alpha \geq 1 \text{ und } x \geq -1\,.$$

Aufgabe 65: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf [a,b] und differenzierbar auf (a,b), mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Zeigen Sie:
Wenn $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$, dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Aufgabe 66: Bestimmen Sie die Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}\,, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\,, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\tan x\,, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\,.$$

Abgabe in der Vorlesungspause am 13.01.2014.
Besprechung in den Übungen vom 15.01.-17.01.2014.