Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 16.12.2013

10. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 55: Zeigen Sie, daß die Reihe

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^j$$

punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert, aber auf $[-1, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert. Berechnen Sie $f(x)$. Ist die Funktion stetig?

Aufgabe 56: Zeigen Sie mithilfe des Additionstheorems, daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist. Zeigen Sie dann, daß $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$ Hölder-stetig mit $L = 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 57: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und periodisch mit Periode T, d.h. $f(x) = f(x + T)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f gleichmässig stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 58: Sei eine Funktionenfolge (f_n) von gleichmäßig stetigen Funktionen gegeben. Zeigen Sie: Falls (f_n) gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert, so ist f ebenfalls gleichmäßig stetig.

Sei dann eine Folge Lipschitz-stetiger Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit derselben Konstanten L für alle f_n gegeben, welche punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, daß f dann ebenfalls Lipschitz-stetig mit Konstante L ist und daß (f_n) sogar gleichmäßig gegen f konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie beim Beweis der gleichmäßigen Konvergenz zu gegebenem $\varepsilon > 0$ die Funktionswerte in den endlich vielen Punkten $a, a + \varepsilon, a + 2\varepsilon, \ldots,$ bis b.

Aufgabe 59: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $|f(x)| \leq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Ist f differenzierbar in 0?

Aufgabe 60: Bestimmen Sie explizit die ersten drei Ableitungen der Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Stellen Sie eine Vermutung für die allgemeine Form der n-ten Ableitung auf und beweisen Sie diese durch Induktion.

Abgabe am 08.01.2014 in der Vorlesung (Teilnehmer von Do- oder Fr-Tutorien) oder im Tutorium.
Besprechung in den Übungen vom 08.01.-10.01.2014.

WIR WÜNSCHEN IHNEN SCHÖNE FEIERTAGE!