Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 09.12.2013

9. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 49: Rechtfertigen Sie die gliedweise Grenzwertnahme in der Herleitung von Eulers Produktformel für den Sinus (s. §I.5.7), indem Sie die auftretenden Produkte mithilfe des log in Summen überführen.

Hinweis: S. Aufgabe 42.

Aufgabe 50: Sei eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, daß $x_0 \in \mathbb{R}$ genau dann Häufungspunkt von A ist, wenn eine Folge (x_n) mit $x_n \in A$, $x_n \neq x_0$ existiert, sodaß $x_n \to x_0$.

Aufgabe 51: Seien ein Häufungspunkt x_0 einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Es existiert ein $y_0 \in \mathbb{R}$, so daß $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$.

ii) Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in A,\ x_n \to x_0$ ist die Bildfolge $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge.

iii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, x' \in A$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $|x' - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Aufgabe 52: Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}\ , \quad \lim_{x \to +\infty} x \sin \frac{1}{x}\ , \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}\ , \quad \lim_{x \to +\infty} x \sin x$$

Aufgabe 53: Geben Sie für die Funktionenfolgen $(f_n), (g_n)$ mit

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{\frac{1}{n}},$$
$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{1}{n} x^n$$

die Grenzfunktionen an. Untersuchen Sie dann die Folgen auf gleichmäßige Konvergenz und beweisen Sie Ihr Resultat.

Aufgabe 54: Zeigen Sie: Die Sinus-Reihe konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten Intervall, nicht aber auf $\mathbb{R}$.

Abgabe in der Vorlesungspause am 16.12.2013.
Besprechung in den Übungen vom 18.12.-20.12.2013.