Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 02.12.2013

8. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 43: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$, und $u : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, mit

$f(x) = x \cdot \sin(1/x) - 2x$, falls $x \neq 0$ und $f(0) = 0$,
$g(x) = \sin(1/x)$, falls $x \neq 0$ und $g(0) = 0$.
$h(x) = (1/x) \cdot \sin(1/x)$, falls $x \neq 0$ und $h(0) = 0$
$u(x) = (1/\sqrt{\sin x}) - 1$, falls $x \neq 0$, $x \neq \pi$ und $u(0) = u(\pi) = 0$.

Welche Funktionen sind stetig ? Welche haben ein Maximum und welche haben ein Minimum im Definitionsbereich ?

Aufgabe 44: Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

stetig sind.

Aufgabe 45: Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$\arcsin : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad \arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^7}{7} + ...,$$
$$\arctan : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

stetig sind.

Aufgabe 46: Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f dann einen Fixpunkt hat, d.h. es gibt ein $c \in [a,b]$, sodaß $f(c) = c$.
Hinweis: Betrachten Sie $g(x) = f(x) - x$.

Aufgabe 47: Sei $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = f(2)$. Zeigen Sie, daß es ein $c \in [0,1]$ gibt, sodaß $f(c) = f(c+1)$.

Aufgabe 48: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig und (x_n) eine Folge mit $x_n \in [0,1]$. Zeigen Sie, daß es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $c_n \in [0,1]$ gibt, sodaß

$$f(c_n) = \frac{1}{n}\left[f(x_1) + \ldots + f(x_n)\right].$$

Zeigen Sie dann mithilfe von Cesaro, daß die Bijektivität von f zusammen mit der Konvergenz von (x_n) die Konvergenz von (c_n) impliziert.

Abgabe in der Vorlesungspause am 09.12.2013.
Besprechung in den Übungen vom 11.12.-13.12.2013.