

7. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 37: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf (absolute) Konvergenz oder Divergenz in Abhängigkeit des Wertebereichs der reellen Parameter x , s oder a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Aufgabe 38: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern und $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ die n -te Partialsumme.

Zeigen Sie:

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.

Falls $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergieren auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$.

Aufgabe 39: Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Verhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^{\alpha}.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{4n} \leq \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2 \leq \frac{1}{2n+1}$.

Aufgabe 40: Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Arcustangens-Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

konvergiert.

Aufgabe 41: Sei (x_n) eine reelle Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_n}{n} \right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} (= \exp(x)).$$

Aufgabe 42: Rechtfertigen Sie die gliedweise Grenzwertnahme in der Bernoulli-Eulerschen Herleitung der Sinus- und Cosinus-Reihe (s. Kapitel I, §4 der Vorlesung).

(Bemerkung: Damit zeigen Sie: Falls $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen sind, für die die Additionstheoreme des Sinus und Cosinus gelten und für die $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{s(x)}{x} = 1$, so sind s und c bereits durch die Reihenentwicklungen des Sinus und Cosinus gegeben.)

Abgabe in der Vorlesungspause am 02.12.2013.

Besprechung in den Übungen vom 04.12.-06.12.2013.