Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 04.11.2013

4. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 19: Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von

$$z = \frac{-6+17i}{3+4i}$$

und schreiben Sie z in Polardarstellung.

Aufgabe 20: Für eine komplexe Zahl z kann man

$$\cos(z) := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ und } \sin(z) := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

definieren. Zeigen Sie, daß die Additionstheoreme auch für diese Funktionen gelten.

Aufgabe 21: Zeigen Sie, daß

$$\arctan x = -\frac{i}{2} \ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right).$$

Aufgabe 22: Geben Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\, i$ an.

Aufgabe 23: Schreiben Sie das Polynom $z^4 - 8z$ als Produkt von Polynomen vom Grad 1.

Aufgabe 24: Sei

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots = (1+\alpha_1 z)(1+\alpha_2 z)(1+\alpha_3 z)\ldots$$

und definieren Sie

$$S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots\ , \quad S_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \ldots\ .$$

Schließen Sie – wie vor Ihnen Euler –, daß

$$S_1 = A_1\ , \quad S_2 = A_1 S_1 - 2A_2\ ,$$

und leiten Sie somit aus Eulers Produktformel für den Sinus ab, daß

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}\ , \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Abgabe in der Vorlesungspause am 11.11.2013.
Besprechung in den Übungen vom 13.11.-15.11.2013.