Musterlösungen zu Blatt 14

1 Aufgabe 79

Sei F eine Stammfunktion von f (existiert, da f stetig ist). Dann ist

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = F(b(x)) - F(a(x))$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Man verwendet die Kettenregel um abzuleiten und erhält

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

2 Aufgabe 80

$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Man substituiert $x = \cos(t)$ und erhält das Integral (beachte $1 - \cos(x)^2 = \sin(x)^2$)

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = -\int \tan(t)^2 dt$$

Mit dem Ansatz

$$\tan(t) = \int \frac{d}{dt}\tan(x)dt = \int 1 + \tan(t)^2 dt = t + \int \tan(t)^2 dt$$

erhält man eine Stammfunktion. Rücksubstituieren unter Verwendung von $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ liefert

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \arccos(x) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. Man substituiert $x = \sinh(t)$ und erhält

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \sinh(t)^2 dt$$

Nun kann man leicht mit partieller Integration und der Identität $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ die Stammfunktion

$$\int \sinh(t)^2 dt = \frac{1}{2}\cosh(t)\sinh(t) - \frac{1}{2}t$$

Man resubstituiert und verwendet $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$ und erhält schließlich

$$\int g(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(x)$$

$h(x) = \frac{x}{x^2-6x+13}$. Mit dem Ansatz aus der Vorlesung formt man um:

$$\int h(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx + 3\int \frac{1}{x^2-6x+13}dx$$

Das erste Integral erhält man damit sofort

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+13}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13)$$

Für das zweite Integral schreibt man $x^2-6x+13=(x-3)^2+4$ und substituiert $z=x-3$. Damit erhält man ein Integral, was man analog zur Vorlesung berechnet:

$$3\int \frac{1}{x^2-6+13}dx = 3\int \frac{1}{z^2+4} = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{z}{2}\right)$$

Man resubstituiert und setzt alles zusammen und erhält

$$\int h(x)dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+13) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

$u(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(2x)}$. Zunächst verwendet man $\cos(2x) = 2\cos(x)^2-1$. Man versucht, die Funktion in einzelne Brüche zu unterteilen, deren Stammfunktion man leicht angeben kann. Dazu schreibt man $1=\cos(x)^2+\sin(x)^2$ und unterteilt

$$u(x) = \frac{2\sin(x)^2-\sin(x)^2+\cos(x)^2}{\sin(x)(2\cos(x)^2-1)} = \frac{2\sin(x)}{2\cos(x)^2-1} + \frac{\cos(x)^2-\sin(x)^2}{\sin(x)(2\cos(x)^2-1)}$$

Wegen $\sin(x)^2 = 1-\cos(x)^2$ erhält man

$$u(x) = \frac{2\sin(x)}{2\cos(x)^2-1} + \frac{1}{\sin(x)}$$

Nun berechnen wir zunächst die Stammfunktion des ersten Bruchs. Man substituiert $\cos(x)=u$, dann ist $\sin(x)dx = -du$ und man erhält

$$\int \frac{2\sin(x)}{2\cos(x)^2-1}dx = -\int \frac{2}{2u^2-1}du$$

Nun führt man noch die Substitution $z=\sqrt{2}u$ durch und erhält mit $2du=\sqrt{2}dz$

$$-\int \frac{2}{2u^2-1}du = -\sqrt{2}\int \frac{1}{z^2-1}dz = \sqrt{2}\,\mathrm{artanh}(z)$$

wobei man letzteres Elementares Integral kennt. Beides resubstituieren liefert

$$\int \frac{2\sin(x)}{2\cos(x)^2-1}dx = \sqrt{2}\,\mathrm{artanh}(\sqrt{2}\cos(x))$$

Nun berechnen wir

$$\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin(x)^2}dx = \int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)^2}$$

Wir erkennen: $1-\cos(x)^2 = (1-\cos(x))(1+\cos(x))$. Man führt eine Partialbruchzerlegung durch (etwa durch Substitution $u=\cos(x)$) und erhält

$$\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} + \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

Die beiden letzten Brüche können leicht integriert werden:

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = -\ln(1+\cos(x)), \quad \int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \ln(1-\cos(x))$$

Setzt man schließlich alles zusammen, so erhält man

$$\int \frac{1}{\sin(x)\cos(2x)} = \frac{1}{2}\ln(1-\cos(x)) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos(x)) + \sqrt{2}\,\mathrm{artanh}(\sqrt{2}\cos(x))$$

$v(x) = \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}$. Mit dem Ansatz

$$\frac{d}{dx}\frac{-1}{2}(x^2+1)^{-1} = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

verwendet man partielle Integration und die aus der Vorlesung bekannte Stammfunktion:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2}dx &= \int (x+1)\frac{x}{(x^2+1)^2}dx \\ &= -\frac{x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)\end{aligned}$$

3 Aufgabe 81

Wegen $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ werden wir im Folgenden für $f(x) = x\ln(x)$ stets stillschweigend $f(0) = 0$ einsetzen. Zunächst berechnet man das Integral. Dabei stellt man fest, dass der erste Term der partiellen Integration in jedem Schritt verschwindet. Man erhält

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \ln(x)^n &= -\int_0^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}\cdot n\cdot \ln(x)^{n-1}\frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n \ln(x)^{n-1}dx \\ &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\int_0^1 x^n \ln(x)^{n-2}dx \\ &= -\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)^3}\int_0^1 x^n \ln(x)^{n-3}dx \\ &= \dots \\ &= (-1)^{n-1}\frac{n!}{(n+1)^{n-1}}\int_0^1 x^n \ln(x)dx \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k \ln(x)^k}{k!}$$

Man berechnet das Integral, indem man Summe und Integral vertauscht und obige Formel verwendet:

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln(x)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} \dots$$

Nun muss man nur noch rechtfertigen, warum man Summe und Integral vertauschen darf. Die stetige(!) Funktion $f(x) = |x \ln(x)|$ nimmt auf dem abgeschlossen Intervall $[0,1]$ ihr Maximum an, sei M dieses Maximum. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k \ln(x)^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} = \mathrm{e}^M$$

Daher konvergiert die Reihe nach dem Weierstrass'schen Majorantenkriterium gleichmäßig.

4 Aufgabe 82

$$f_n^{(k)} = \frac{n^k x}{(1+n^2x^2)^2}$$

Man erkennt leicht, dass für alle $x \in [0,1]$ und für $k = 0, 1, 2$ stets

$$\lim_{n \to \infty} f_n^{(k)}(x) = 0$$

da der Nenner wie n^4 wächst. Um die Folge auf gleichmäßige Konvergenz zu prüfen, berechnen wir die maximalen Funktionswerte (offenbar ist stets $f_n^{(k)} \geq 0$). Man leitet ab und erhält

$$\frac{d}{dx} f_n^{(k)}(x) = \frac{n^k(1+n^2x^2)(1-3n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^4}$$

Die Nullstelle der Ableitung (im Intervall $[0,1]$) ist $\frac{\sqrt{3}}{3n}$ und der Funktionswert ist

$$f_n^{(k)}\left(\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{16}}_{=:C} n^{k-1}$$

Insbesondere sind für $k = 0$ die Funktionswerte beschränkt durch Cn^{-1}. Somit ist für $k = 0$ die Konvergenz gleichmäßig. Für $k = 1$ wird stets der Wert $C > 0$ angenommen, dieser ist unabhängig von n, somit ist für $k = 1$ die Konvergenz nicht gleichmäßig. Für $k = 2$ erhält man sogar eine Folge $x_n := C \cdot n$ mit $f_n(x_n) \to \infty$, obwohl die Funktionenfolge punktweise gegen 0 konvergiert. Somit ist auch für $k = 2$ die Konvergenz nicht gleichmäßig.

Für $k = 0$ können wir aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz sofort schließen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{(0)}(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(x)dx = 0$$

Für $k = 1$ und $k = 2$ berechnet man eine Stammfunktion mit dem Ansatz

$$\frac{d}{dx}(1 + n^2x^2)^{-1} = -2xn^2(1 + n^2x^2)^{-2}$$

Mit der Stammfunktion berechnet man für $k = 1$ und $k = 2$ die Integrale

$$\int_0^1 f_n^{(k)}(x)dx = \frac{1}{2}\frac{n^k}{n^2 + 1}$$

Somit ist für $k = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{(1)}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n^2 + 1)} = 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{(1)}(x)dx$$

obwohl die Konvergenz nicht gleichmäßig ist. Für $k = 2$ erhält man allerdings

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{(2)}(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2(n^2 + 1)} = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{(2)}(x)dx$$

Somit hat man ein Beispiel einer Funktionenfolge, die nicht gleichmäßig konvergiert, bei der man im einen Fall dennoch Integral und Limes vertauschen kann, im anderen Fall aber nicht.

5 Aufgabe 83

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n} \sin(nx)$$

Es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\,\mathrm{e}^{-n} \sin(nx)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n}$$

Die Reihe auf der rechten Seite konvergiert (geometrische Reihe). Nach dem Weierstrass'schen Majorantenkriterium folgt, dass obige Reihe gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert. Somit ist die Funktion $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Wir betrachten nun die Funktionenfolge der Ableitungen:

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-n}\, n \cos(nx)$$

Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n\,\mathrm{e}^{-n} \cos(nx)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-n}$$

Die rechte Reihe konvergiert, daher konvergiert die Folge $f_n'(x)$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{e}^{-n} \cos(nx)$$

Nach Satz 1, (4.2) ist f differenzierbar mit stetiger Ableitung $f'(x) = g(x)$.

6 Aufgabe 84

Auf dem Intervall $[0, b]$ mit $b < 1$ konvergiert die Reihe gleichmäßig, da

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(-1)^j x^{2j}| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} (b^2)^j$$

und die rechte Reihe konvergiert (geometrische Reihe). Somit darf die Reihe termweise integriert werden. Man erhält

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{1}{1+x^2} dx &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^b (-1)^j x^{2j} dx \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{1}{b^{2j+1}}\end{aligned}$$