Musterlösung Aufgabe 5, Probeklausur)

1 Anmerkungen

Da die Probeklausur dazu da war, Ihnen einerseits zu zeigen, wie eine richtige Klausur an der Uni aussehen kann, Sie aber andererseits darauf aufmerksam zu machen, welche formalen Maßstäbe in der Mathematik in der Regel gelten, wurde Aufgabe 5 der Probeklausur extra streng gewertet. Beachten Sie deshalb in der Folge bitte folgende Punkte:

> Im Gegensatz zur Schule heißt 'bestimmen' in einer Klausur in der Regel nicht, dass Sie nur das Ergebnis angeben sollen. Zumindest ein mathematisch schlüssiger Rechenweg sollte erkennbar sein.
>
> Zu einer mathematisch schlüssigen Begründung zählt NICHT die sogenannte 'Ingenieurs-Induktion', die darauf beruht, eine Aussage für die ersten wenigen Folgenglieder nachzuprüfen und daraus zu folgern, dass die Aussagen für alle Folgenglieder gilt (im Fall von Aufgabe 5 also die ersten Folgenglieder aufmalen und daraus auf die ganze Folge schließen).
>
> Verlassen Sie sich nicht darauf, dass wenn Ihr Tutor über fehlende Begründungen hinwegsieht, es jeder Tutor so handhabt. Aus mathematischer Sicht hat ein Korrektor jedes Recht, formale Mängel anzukreiden.
>
> Die Klausuren unserer Arbeitsgruppe sind so konzipiert, dass extra wenige Aufgaben gestellt werden, um Ihnen die Möglichkeit zu geben, zu allen Aufgabe mathematisch saubere Argumentationen aufzuschreiben. Nutzen Sie also die Zeit ;-)
>
> Nachdem Sie durch Aufgabe 5 der Probeklausur hoffentlich ausreichend vorgewarnt sind, könnte es sein, dass eine vergleichbare Aufgabe in der Hauptklausur so gewertet wird, dass die Angabe jedes richtigen Ergebnisses noch jeweils einen halben Punkt gibt. Dies wird aber höchstens dann so sein, wenn der Schnitt der Klausur ansonsten unerwartet schlecht ist (was in der Probeklausur z.B. nicht der Fall war). Verlassen Sie sich also nicht darauf, ohne Begründung Punkte zu bekommen.

2 Mögliche Lösung von Aufgabe 5

Eine Lösung, welche in der Hauptklausur mit voller Punktzahl bewertet würde, ist die folgende:

> Aus den Eigenschaften des Sinus folgt $\sin(2n\frac{\pi}{2}) = 0, \forall n \geq 0$, $\sin((4n+1)\frac{\pi}{2}) = 1, \forall n \geq 0$ und $\sin((4n+3)\frac{\pi}{2}) = -1, \forall n \geq 0$.
>
> Aus diesen Eigenschaften des Sinus folgt, dass die Folge (a_n) zerlegt werden kann in drei Teilfolgen

$(a_{n,1})$, $(a_{n,2})$ und $(a_{n,3})$ mit Folgengliedern

$$\begin{aligned} a_{n,1} &= 0 \\ a_{n,2} &= \frac{1}{n} \\ a_{n,3} &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Laut Vorlesung konvergieren alle drei Teilfolgen gegen 0, womit auch die gesamte Folge gegen 0 konvergiert. Somit ist 0 der einzige HP, also $\limsup = \liminf = 0$.

Offensichtlich ist $a_n, 1 > 0$, $\forall n \geq 0$, $(a_{n,2})$ monoton fallend und $a_{n,3} < 0$, $\forall n \geq 0$, $(a_{n,3})$ monoton steigend. Somit

$$\begin{aligned} \sup(a_n) &= \sup(a_{n,2}) = a_{0,2} = 1 \\ \inf(a_n) &= \inf(a_{n,3}) = a_{0,3} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$