Musterlösungen zu Blatt 15, Analysis I

WS 2013/14

Inhaltsverzeichnis

Aufgabe 85: Konvergenzradien

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der Potenzreihen

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^2}{2^j} x^j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 x^{j^2}.$$

Lösung

Wir benutzen die folgende Formel für den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$:

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}}$$

Erste Potenzreihe:

Hier ist $a_j = \dfrac{j^2}{2^j}$ und somit

$$\sqrt[j]{|a_j|} = \frac{j^{2/j}}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } j \to \infty,$$

denn $j^{1/j} \to 1$ ist aus der Vorlesung oder früheren Übungen bekannt* und $j^{2/j} = (j^{1/j})^2 \to 1^2 = 1$.

Also ist der Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Zweite Potenzreihe:

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 x^{j^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ Quadratzahl} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit gilt für den gesuchten Limes superior:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{1}{1} = 1.$$

* Bemerkung:

Falls $j^{1/j} \to 1$ nicht bekannt ist, kann man sich das auch wie folgt herleiten:

$$\ln j^{1/j} = \frac{\ln j}{j}$$

Zähler und Nenner gehen jeweils gegen ∞, daher gilt mit der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln j}{j} = \lim_{j\to\infty} \frac{\frac{1}{j}}{1} = 0$$

also:

$$\ln j^{1/j} \to 0$$

Wende auf beiden Seiten exp an (möglich, da exp stetig ist):

$$j^{1/j} \to 1.$$

Aufgabe 86: Approximation von $\exp(x)$ durch Polynome

Bestimmen Sie ein Polynom $p(x)$ so, dass $|\exp(x) - p(x)| < 10^{-2}$ für alle $x \in [-1, 1]$.

Lösung

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (= \text{Taylorreihe von exp um } x = 0)$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, also insbesondere gleichmäßig auf abgeschlossenen, beschränkten Teilintervallen von $\mathbb{R}$, beispielsweise $[-1, 1]$. Folglich sind die Taylorpolynome

$$p_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}$$

von $\exp(x)$ gute Kandidaten für $p(x)$, denn die gleichmäßige Konvergenz besagt ja gerade, dass der maximale Abstand zwischen $\exp(x)$ und $p_k(x)$ in $[-1, 1]$ für $k \to \infty$ gegen Null geht.

Wie groß muss k gewählt werden?

Betrachte dazu die Taylor-Formel mit Lagrange-Restglied: Zu $x \in [-1, 1]$ gibt es ξ zwischen 0 und x, so dass

$$\exp(x) = p_k(x) + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \underbrace{\exp^{(k+1)}(\xi)}_{=e^{\xi}}$$

Daraus folgt

$$|\exp(x) - p_k(x)| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} e^{\xi} \right| \leqslant \frac{e}{(k+1)!}$$

Wann ist der rechte Ausdruck kleiner als 10^{-2}? Umstellen ergibt $(k+1)! > 100e \approx 272$. Da $5! = 120$ und $6! = 720$, ist die Ungleichung für $k \geqslant 5$ erfüllt. Wähle also

$$p(x) = p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

Bemerkung: Sorgfältigere Abschätzungen hätten ergeben, dass auch $k = 4$ schon gereicht hätte. Aber in der Aufgabe war ja nur nach irgendeinem Polynom gefragt, nicht nach einem Polynom kleinsten Grades.

Aufgabe 87: Taylorreihen von $\cos^3 x$ und $\sin x$

Verwenden Sie das Additionstheorem $\cos(3x) = 4(\cos x)^3 - 3\cos x$ um die Reihenentwicklung von $(\cos x)^3$ zu berechnen.

Berechnen Sie dann die Taylorreihe von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi/4$, einmal nach Definition und einmal unter Benutzung des Additionstheorems und bekannter Reihen.

Lösung

Herleitung des Additionstheorems

$$
\begin{aligned}
\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
\cos(2x) &= \cos(x+x) = \cos^2 x - \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} = 2\cos^2 x - 1 \\
\sin(2x) &= \sin(x+x) = 2\sin x\cos x \\
\Rightarrow \quad \cos(3x) &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2\sin x\cos x)\sin x \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\cos x \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x.
\end{aligned}
$$

Reihenentwicklung von $\cos^3 x$

$$
\begin{aligned}
4\cos^3 x &= \cos(3x) + 3\cos x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} + 3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3^{2n}+3)\frac{x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

wobei die termweise Addition der Reihen dadurch gerechtfertigt ist, dass die Reihen absolut konvergieren. Somit folgt

$$
\cos^3 x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (3^{2n}+3)\frac{x^{2n}}{(2n)!}.
$$

Reihenentwicklung von $\sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi/4$

einmal nach Definition: benötigen dazu die n-ten Ableitungen von $\sin x$ an der Stelle $\pi/4$. Wegen $\sin^{(4)} = \sin$ erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
\sin^{(n)}(\pi/4) &= \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 4 \\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(\pi/4)}{n!}(x-\tfrac{\pi}{4})^n \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!}(x-\tfrac{\pi}{4})^n.
\end{aligned}
$$

einmal mit Additionstheorem:

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin(x - \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{4})\\ &= \sin(x - \tfrac{\pi}{4})\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \cos(x - \tfrac{\pi}{4})\sin(\tfrac{\pi}{4})\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-\tfrac{\pi}{4})^{2n+1} \;+\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\tfrac{\pi}{4})^{2n}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\lfloor n/2\rfloor}}{n!}(x-\tfrac{\pi}{4})^n.\end{aligned}$$

Aufgabe 88: Differenzenquotienten

Seien $f \in C^3(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$ und der symmetrische Differenzenquotient $\mathrm{Diff}_{x_0}(h)$ aus Aufgabe 70 gegeben. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Diff}_{x_0}(h) = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

d.h. es existieren Konstanten $h_0 > 0$ und $c > 0$ mit $|\mathrm{Diff}_{x_0}(h) - f'(x_0)| \leqslant ch^2$ für alle $h \in (0, h_0)$.

Zeigen Sie dann, daß für $f \in C^4(a,b)$

$$\frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Hinweis: Taylor.

Auf dem Aufgabenblatt war ein Tippfehler: $f(x)$ statt $f(x_0)$ in der letzten Gleichung.

Bemerkung zur Landau-Notation

Das Symbol $\mathcal{O}(g(h))$ bezeichnet die Menge aller Funktionen $f(h)$, die in einer Umgebung von 0 definiert sind (außer möglicherweise in 0 selbst) und asymptotisch durch die Funktion $g(h)$ beschränkt sind, das bedeutet:

$$\begin{aligned}&f(h) \in \mathcal{O}(g(h)) \;:\Longleftrightarrow\\ &\qquad \exists h_0 > 0, c > 0 \quad \forall h, 0 < |h| < h_0 : \quad |f(h)| \leqslant c\,|g(h)|\end{aligned}$$

(Insbesondere in der Informatik kommt es auch vor, dass die Asymptotik gegen ∞ statt gegen 0 betrachtet wird. Die Definition sieht dann etwas anders aus.)

Oft schreibt man auch $f(h) = O(g(h))$ statt $f(h) \in O(g(h))$. Wenn $\mathcal{O}(\dots)$ in einer Formel wie in der Aufgabenstellung auftaucht, ist damit ein Vertreter von $\mathcal{O}(\dots)$ gemeint.

Lösung

Aus der Taylorformel mit Lagrange-Restglied folgt sofort folgender allgemeine Satz:

Sei $f \in C^{k+1}(a,b)$, $x_0 \in (a,b)$. Dann gilt:

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{k}\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) \;+\; \mathcal{O}(h^{k+1})$$

(a)

Im ersten Teil der Aufgabe ist $f \in C^3(a,b)$ gegeben, somit gilt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3)$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3).$$

Subtrahiere die beiden Gleichungen. Achtung: da die Vertreter von $\mathcal{O}(h^3)$ nicht die gleichen sein müssen, fällt $\mathcal{O}(h^3)$ bei dieser Operation nicht weg!

$$\Rightarrow \qquad f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \mathcal{O}(h^3)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Somit ist die Behauptung bewiesen, da die linke Seite gerade $\mathrm{Diff}_{x_0}(h)$ ist.

(b)

Im zweiten Teil der Aufgabe ist $f \in C^4(a,b)$ gegeben, somit gilt:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4)$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}(h^4).$$

Addiere die beiden Gleichungen:

$$\Rightarrow \qquad f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + h^2f''(x_0) + \mathcal{O}(h^4)$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} = f''(x_0) + \mathcal{O}(h^2).$$

Aufgabe 89: Uneigentliche Integrale I

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar auf $[0,\infty)$ und ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass f uneigentlich integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist und $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$.

Lösung

f ist genau dann uneigentlich integrierbar auf $\mathbb{R}$, wenn f uneigentlich integrierbar sowohl auf $(-\infty, 0]$ als auch auf $[0,\infty)$ ist. Letzteres ist nach Voraussetzung gegeben, d.h. $\int_0^\infty f(x)\ dx$ existiert als reelle Zahl (nicht $\pm\infty$).

Es bleibt somit zu zeigen: $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^\infty f(x)\,dx$.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} f(x)\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} -f(-x)\,dx && \text{(da } f \text{ ungerade)} \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_{b}^{0} f(u)\,du && \text{(Substitution } u=-x,\ du=-dx\text{)} \\
&= -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(u)\,du && \text{(Vertauschen der Integrationsgrenzen)} \\
&= -\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx. && (u \to x \text{ umbenannt})
\end{aligned}$$

Aufgabe 90: Uneigentliche Integrale II

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

(a)

Verwende Vergleichskriterium:

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

konvergiert, denn der Integrand kann betragsmäßig durch eine Funktion abgeschätzt werden, deren Integral konvergiert:

$$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1.$$

(b)

Ebenfalls mit dem Vergleichskriterium sieht man, dass auch das zweite Integral konvergiert:

$$\left|\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$

(c)

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

ist uneigentlich in beiden Integrationsgrenzen, existiert also genau dann, wenn $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ existieren. Aber

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{b\to\infty}[2\sqrt{x}]_1^b = \lim_{b\to\infty} 2\sqrt{b} - 2 = \infty,$$

somit liegt hier keine Konvergenz vor.

(d)

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

ist uneigentlich in beiden Grenzen und existiert genau dann, wenn $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ existiert. Denn weil der Integrand eine ungerade Funktion ist, folgt daraus analog zu Aufgabe 89, dass auch schon $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ existiert und dass

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0.$$

Und das ist auch tatsächlich so, denn

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \lim_{b\to 1} \int_0^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= \lim_{b\to 1} -\int_1^{1-b^2} \frac{du}{2\sqrt{u}} \qquad \text{(Substitution } u = 1-x^2,\ du = -2x dx\text{)} \\
&= \lim_{b\to 1} -[\sqrt{u}]_1^{1-b^2} \\
&= \lim_{b\to 1} 1 - \sqrt{1-b^2} = 1.
\end{aligned}$$