Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 04.12.2013

Probeklausur zu Analysis I WS 2013/14

ID Nummer: ....

Name: ....

Geburtsdatum: ....

Matrikelnummer: ....

Übungsgruppenleiter: ....

Abschluss (D,B,L neu, L alt): ....

Probeklausur zu Analysis I — 04.12.2013

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	6	6	6	6	6	24
err. Punkte						

Hinweise: WICHTIG !

- Die Bearbeitungszeit beträgt 105 Minuten.
- Sie dürfen ALLE Resultate aus der Vorlesung verwenden.
- Sie brauchen nur vier der fünf Aufgaben zu bearbeiten. Wenn Sie zu allen Aufgaben Lösungen abgeben, so wird Aufgabe 5 nicht gewertet.
- Schreiben Sie auf jedes Extra-Blatt Ihre ID Nummer, schreiben Sie mit Kugelschreiber oder Füller.
- Wenn Sie Extra-Blätter benötigen, verwenden Sie für jede Aufgabe jeweils ein separates Blatt.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Beanworten Sie durch Ankreuzen:

a) Welche der nachfolgenden Aussagen sind korrekt?

- ☐ Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ liegen dicht in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad n > |x|$.
- ☐ Jede nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.
- ☐ Jede nach unten beschränkte, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Infimum in $\mathbb{R}$.

b) Sei $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Aus welcher der nachfolgenden Aussagen folgt Stetigkeit von f im Punkt x_0?

- ☐ $\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \quad : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- ☐ $\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \quad : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta \quad : \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
- ☐ Es existiert eine Folge (x_n) mit $x_n \in A \, \forall n$, sodaß $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Hinweis: Es können mehrere Antwortmöglichkeiten richtig sein. In beiden Teilaufgaben gilt: Wenn Sie alle Kreuze richtig gesetzt haben, erhalten Sie die volle Punktzahl; wenn Ihre Lösung um ein Kreuz von der richtigen Lösung abweicht, die Hälfte der Maximalpunktzahl. Bei einer größeren Abweichung wird die Teilaufgabe mit 0 Punkten gewertet.

Aufgabe 2: (6 Punkte)

Gegeben sei eine Folge (a_n) mit $a_n = q^n$, $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Induktion, dass

$$\sum_{j=0}^{n} a_j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Für welche $k \in \{-1, 0, 1\}$ ist die Folge

$$\left((-1)^n n^k\right)$$

eine Cauchy-Folge? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Weisen Sie nach, dass die Logarithmus-Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$$

für $x = \frac{1}{2}$ konvergiert und für $x = 2$ divergiert. Was ergibt sich für $x = 1$?

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Bestimmen Sie sup, inf, lim sup und lim inf der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n}.$$