

## 9. Übungsblatt zur Analysis I

### Aufgabe 44 :

Bestimmen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{2x}$$

Hinweis:  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ .

### Aufgabe 45 :

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x$$

### Aufgabe 46 :

Es sei  $x_0$  ein Häufungspunkt der Menge  $A \subset \mathbb{R}$ , und  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) Es existiert ein  $y_0 \in \mathbb{R}$ , so dass  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ .
- (b) Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in A \setminus \{x_0\}$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  ist die Bildfolge  $(f(x_n))$  eine Cauchy-Folge.
- (c) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $x, x' \in A$  mit  $0 < |x - x_0| < \delta$  und  $0 < |x' - x_0| < \delta$  gilt:  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .

### Aufgabe 47 :

Sei  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(0) = f(2)$ . Zeigen Sie dass es ein  $c \in [0, 1]$  gibt, so dass  $f(c) = f(c+1)$ .

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $g(x) = f(x+1) - f(x)$ .