Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 25.11.2008

7. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 35 :
Untersuchen Sie die folgenen Reihen auf absolute, nicht-absolute Konvergenz oder Divergenz, in Abhängigkeit des Wertebereichs der reellen Parameter x, s oder a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Aufgabe 36 :
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit positiven Gliedern und $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ die n-te Partialsumme. Zeigen Sie:
Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergieren auch die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
Falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert, dann divergieren auch die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$.

Aufgabe 37 :
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ das Verhalten der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^{\alpha} .$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\frac{1}{4n} \le \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^2 \le \frac{1}{2n+1}$.

Aufgabe 38 :
Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Arcustangens-Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$

konvergiert.

Aufgabe 39 :
Sei (x_n) eine reelle Folge mit Grenzwert $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \ \ (= \exp(x)) .$$

Aufgabe 40 :
Rechtfertigen Sie die gliedweise Grenzwertnahme in der Bernoulli-Eulerschen Herleitung der Sinus- und Cosinus-Reihe (s. Kapitel I, §4 der Vorlesung).
(Bemerkung: Damit zeigen Sie: Falls $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen sind, für die die Additionstheoreme des Sinus und Cosinus gelten und für die $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$, so sind s und c bereits durch die Reihenentwicklungen des Sinus und Cosinus gegeben.)

Abgabe in der Vorlesungspause am 02.12.2008, Besprechung in den Übungen