Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 18.11.2008

6. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 29 :
Weisen Sie nach, dass das Produkt reeller Zahlen wohldefiniert ist. Zeigen Sie dazu:

a) Falls (a_n) und (b_n) Cauchy-Folgen sind, so auch die Produktfolge $(a_n b_n)$.

b) Ist $(a_n) \sim (a'_n)$ und $(b_n) \sim (b'_n)$, so auch $(a_n b_n) \sim (a'_n b'_n)$.

Aufgabe 30 :
Zeigen Sie, dass die reelle $<$–Relation wohldefiniert ist.

Aufgabe 31 :
Zeigen Sie: Ist $s = \overline{(s_n)} \in \mathbb{R}$, so ist $|s| = \overline{(|s_n|)}$.

Aufgabe 32 :
Sei $0 < b \leq a$. Zeigen Sie, dass die durch $a_0 = a$, $b_0 = b$ und die arithmetischen bzw. geometrischen Mittel

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\ , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

rekursiv definierten Folgen (a_n) und (b_n) gegen denselben Grenzwert konvergieren.
Hinweis: $b \leq b_1 \leq a_1 \leq a$ (warum?)

Aufgabe 33 :
Zeigen Sie: Für eine nach oben beschränkte reelle Folge (s_n) ist

$$\limsup_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \quad \text{wobei } \sigma_n = \sup\{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \ldots\}.$$

Aufgabe 34 :
Zeigen Sie: Ist s der einzige Häufungspunkt einer beschränkten reellen Folge (s_n), so konvergiert die Folge gegen s.
Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass dies für unbeschränkte Folgen nicht gilt.

Abgabe in der Vorlesungspause am 25.11.2008, Besprechung in den Übungen