Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 11.11.2008

5. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 23 :

a) Untersuchen Sie, welche der Folgen mit n-tem Term

$$\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\ ,\quad \frac{2n-1}{n+2}\ ,\quad \frac{(-1)^n n+1}{n+2}\ ,\quad \frac{2n+(-1)^n}{n+2}\ ,\quad \frac{n^2-1}{n+2}$$

konvergieren, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Geben Sie Folgen (s_n) und (v_n) mit $s_n \to \infty$ und $v_n \to 0$ zu jeder der folgenden Situationen an:

$$s_n v_n \to \infty\ ;\quad s_n v_n \to c \in \mathbb{R}\ ;\quad s_n v_n \text{ beschränkt, aber nicht konvergent .}$$

Aufgabe 24 :
Zeigen Sie, dass die Folge (s_n) mit

$$s_n = \frac{2n}{n+2} + 2^{-n}$$

gegen $s = 2$ konvergiert. Bestimmen Sie zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$, etwa $\varepsilon = 10^{-6}$, eine Zahl N, sodass $|s_n - s| < \varepsilon$ für $n \geq N$.

Aufgabe 25 :
(Cesàro–Summierung) Zur Folge (a_n) betrachte man die Folge

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\ .$$

Zeigen Sie: Falls (a_n) konvergiert, so konvergiert (b_n) gegen denselben Grenzwert.
Bemerkung: Das Beispiel $a_n = (-1)^n$ zeigt Ihnen, dass (b_n) konvergieren kann, ohne dass (a_n) konvergiert.

Aufgabe 26 :
Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 8, dass die Folge

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$$

eine Cauchy–Folge ist. Geben Sie für $\varepsilon = 10^{-5}$ eine ganze Zahl N an, sodass $|a_n - a_{n+k}| < \varepsilon$ für $n \geq N$ und $k \geq 1$ ist.

Aufgabe 27 :
Zeigen Sie, dass die Folge

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)(j+2)}$$

eine Cauchy–Folge ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
Hinweis: Bestimmen Sie A, B und C, sodass $\frac{1}{j(j+1)(j+2)} = \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} + \frac{C}{j+2}$ (Partialbruchzerlegung)

Aufgabe 28 :
Folgern Sie aus der Dreiecksungleichung, dass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a-b| \geq \Big|\,|a| - |b|\,\Big|\ .$$

Abgabe in der Vorlesungspause am 18.11.2008, Besprechung in den Übungen