Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 03.02.2009

15. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 78 :
Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos 2x}, \qquad \text{b)} \int \frac{x^2+x}{(x^2+1)^2} dx \ .$$

Mögliche Vorgehensweise: Zu a): Bringen Sie durch die Substitution $y = \cos x$ den Integranden in rationale Form. Zu b): Wenden Sie partielle Integration auf den ersten Summanden des Integrals an.

Aufgabe 79 :
Berechnen Sie die Integrale

$$\text{a)} \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx, \qquad \text{b)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \ .$$

Mögliche Vorgehensweise zu b): Berechnen Sie zunächst das Integral $\int \sinh^2 y \; dy$.

Aufgabe 80 :
Berechnen Sie $\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx$ durch partielle Integration. Verwenden Sie dann die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion in $x^x = e^{x \ln x}$, um zu zeigen (Bernoulli 1697):

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{6^6} + \dots \ .$$

Aufgabe 81 :
Sei $f_n^{\{k\}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ für $k = 0,1,2$ gegeben durch

$$f_n^{\{k\}}(x) = \frac{n^k x}{(1+n^2x^2)^2} \ .$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{\{k\}}(x)$ für $x \in [0,1]$ und den Maximalwert von $f_n^{\{k\}}$. Untersuchen Sie, ob die Konvergenz gleichmäßig ist. Gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^{\{k\}}(x) dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n^{\{k\}}(x) dx \ \ ?$$

Aufgabe 82 :
Finden Sie den größten Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(nx)$ und zeigen Sie, dass f differenzierbar mit stetiger Ableitung ist.

Aufgabe 83 :
Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j}$$

auf dem Intervall $[0,b]$ mit $0 < b < 1$ termweise integriert werden darf. Sie erhalten so die Arcustangens–Reihe.

Abgabe in der Vorlesungspause am 10.02.2009