Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 20.01.2009

13. Übungsblatt zur Analysis I

Aufgabe 66 :
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extremwerte:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2-1| & \text{für } |x| \geq 1 \\ e - e^{x^2} & \text{für } |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad g(x) = 1 - \sqrt{|x^2-1|} \text{ für } x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 67 :
Für welche $p \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(1+x^2) - px$ monoton steigend auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe 68 :
(i) Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige, auf (a,b) differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f' \geq g'$ auf (a,b). Zeigen Sie, dass dann $f \geq g$ auf $[a,b]$.

(ii) Zeigen Sie: $\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}$ für alle $x \geq 0$.

Aufgabe 69 :
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[0,1]$ und differenzierbar auf $(0,1)$, wobei die Ableitung monoton steigend sei.
Zeigen Sie: Wenn $f(0) = f(1) = 0$ gilt, dann ist die Funktion auf $[0,1]$ nicht positiv, d.h. $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [0,1]$.

Hinweis:
(a) Wenden Sie den Satz vom Maximum und Minimum an und untersuchen Sie die Extrema von f,
(b) oder wenden Sie den Mittelwertsatz in einem Widerspruchsbeweis geschickt an.

Aufgabe 70 :
Seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und $f \to \infty$, $g \to \infty$ für $x \to a+$.

(i) Zeigen Sie: Dann ist

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sofern die rechte Seite existiert.
Hinweis: Gehen Sie beim Beweis wie in der Vorlesung vor. Begründen Sie die Existenz des entsprechenden $\delta_1 > 0$ ausführlich, indem Sie zunächst die Beschränktheit von $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$ auf $(a, a+\delta)$ und von $\frac{f(x)}{g(x)}$ auf $(a, a+\frac{\delta}{2})$ nachweisen und anschließend

$$0 = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} - \frac{f(x)}{g(x)} + \left(1 - \frac{1 - \frac{f(y)}{f(x)}}{1 - \frac{g(y)}{g(x)}}\right) \cdot \frac{f(x)}{g(x)}$$

betrachten.

(ii) Finden Sie eine einfache Transformation, um den Fall des linksseitigen Grenzfalles ($x \to b-$) auf einen bereits behandelten Fall zurückzuführen. Diskutieren Sie kurz die Auswirkungen der Transformation.

(iii) Finden Sie ebenfalls eine einfache Transformation, um den Fall $a = -\infty$ auf einen bereits behandelten Fall zurückzuführen, und diskutieren Sie kurz die Auswirkungen der Transformation.

Aufgabe 71 :

Zeigen Sie, dass die durch die Trapezregel mit $h = (b-a)/n \quad (n \in \mathbb{N})$ gegebenen Summen

$$\frac{h}{2}f(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) + \ldots + hf(b-h) + \frac{h}{2}f(b)$$

Riemann–Summen zu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind.

Abgabe in der Vorlesungspause am 27.01.2009