EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 15.1.2019**

Übungsaufgaben 9

Problem 1. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ $(1 \leq d \leq 2)$ beschränkt, Lipschitz. Gegeben seien $\boldsymbol{\beta} \in [C^1(\mathcal{O})]^d$, sodaß $\operatorname{div} \boldsymbol{\beta} = 0$ auf $\mathcal{O}$, sowie $y_0, a, b \in \mathbb{L}^\infty(\mathcal{O})$, sodaß $a \leq b$ f.ü. Gesucht ist nun eine Lösung von

$$J(y,u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} |y - y_0|^2 + |u|^2 \,\mathrm{d}x \to \min! \qquad \text{u.d.N.} \qquad \begin{cases} -\Delta y + [\boldsymbol{\beta} \cdot \nabla] y + y = u & \text{in } \mathcal{O}\,, \\ y = 0 & \text{auf } \partial\mathcal{O}\,, \\ u \in \{\varphi \in \mathbb{L}^2 : a \leq \varphi \leq b\} \end{cases}$$

a) Wie lauten notwendige Optimalitätsbedingungen?

b) Sei $d = 1$. Wir wollen diese notwendigen Optimalitätsbedingungen als Startpunkt verwenden für eine approximative Lösung mithilfe eines Galerkin-Verfahrens (vgl. **Problem 1** auf **Übungsblatt 3**). Wie lautet das endlich-dimensionale Problem?

c) Detaillieren Sie, wie Sie nun das Problem aus b) lösen?

Problem 2. Wir verwenden die Daten aus **Problem 1**. Gesucht ist eine Lösung von

$$J(y,u) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} |y - y_0|^2 + |u|^2 \,\mathrm{d}x \to \min! \qquad \text{u.d.N.} \qquad \begin{cases} -\Delta y + (y^2 - 1) y = u & \text{in } \mathcal{O}\,, \\ y = 0 & \text{auf } \partial\mathcal{O}\,, \\ u \in \{\varphi \in \mathbb{L}^2 : a \leq \varphi \leq b\} \end{cases}$$

Beantworten Sie die Fragen a) bis c) aus **Problem 1**.

Abgabe: 21.1.2019 im Tutorium.