EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät**

**Fachbereich Mathematik**

**Prof. Dr. Andreas Prohl**

# Optimierung mit Differentialgleichungen

**Wintersemester 18** **Tübingen, 8.1.2019**

## Übungsaufgaben 8

**Problem 1.** Sei $\mathscr{X} \subset \mathbb{X}$ nichtleere, abgeschlossene, konvexe Teilmenge des Hilbertraums $\mathbb{X}$. Betrachte die Projektion $\mathscr{P}_{\mathscr{X}} : \mathbb{X} \to \mathscr{X}$, mit

$$\big\|x - \mathscr{P}_{\mathscr{X}}[x]\big\|_{\mathbb{X}} = \min_{y \in \mathscr{X}} \|x - y\|_{\mathbb{X}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{X}\,.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(i) $\mathscr{P}_{\mathscr{X}}$ *ist wohldefiniert.*

(ii) $z = \mathscr{P}_{\mathscr{X}}[x] \quad \forall\, x \in \mathbb{X} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(z - x, y - z\big)_{\mathbb{X}} \geq 0 \quad \forall\, y \in \mathscr{X}\,.$

(iii) $\mathscr{P}_{\mathscr{X}}$ *ist nicht-expansiv, d.h.*

$$\big\|\mathscr{P}_{\mathscr{X}}[y_1] - \mathscr{P}_{\mathscr{X}}[y_2]\big\|_{\mathbb{X}} \leq \|y_1 - y_2\|_{\mathbb{X}} \qquad \forall\, y_i \in \mathbb{X}\,.$$

(iv) $\mathscr{P}_{\mathscr{X}}$ *ist monoton, d.h.*

$$\Big(\mathscr{P}[y_1] - \mathscr{P}[y_2], y_1 - y_2\Big)_{\mathbb{X}} \geq 0 \qquad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{X}\,.$$

(v) *Sei* $x \in \mathscr{X}$ *und* $d \in \mathbb{X}$*. Dann ist die Funktion*

$$\phi(t) := \frac{1}{t}\big\|\mathscr{P}_{\mathscr{X}}[x + td] - x\big\|_{\mathbb{X}} \quad (t > 0) \qquad \textit{nichtwachsend.}$$

**Problem 2.** Es erfülle $\mathscr{X} \subset \mathbb{X}$ die in **Problem 1.** genannten Eigenschaften. Fixiere ein $\xi \in \mathbb{X}$ und wähle $\gamma > 0$. Dann sind äquivalent:

(i) $x \in \mathscr{X}$ erfüllt: $\big(\xi, y - x\big)_{\mathbb{X}} \geq 0 \quad \forall\, y \in \mathscr{X}\,.$

(ii) $x \in \mathscr{X}$ erfüllt: $x - \mathscr{P}_{\mathscr{X}}\big[x - \gamma\,\xi\big] = 0\,.$

**Problem 3.** In der Vorlesung haben wir eine Variationsungleichung als notwendige Optimalitätsbedingung der Optimierungsaufgabe

$$\min J(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in \mathscr{X}\,,$$

mit $\mathscr{X}$ aus **Problem 1.** kennengelernt.

(i) Wie lautet diese für das Kontrollproblem:

$$\min J(y,u) \qquad \text{u.d.N.} \qquad \begin{cases} e(y,u) = 0\,, \\ u \in \mathscr{U}_{\mathrm{adm}}\,, \end{cases}$$

unter der Annahme (A2) und unter Verwendung des reduzierten Funktionals $\widehat{J}$?

(ii) Sei $\mathbb{U} = \mathbb{L}^2$, und $a, b \in \mathbb{L}^\infty$ so, daß $a \leq b$. Betrachte

$$\mathscr{U}_{\mathrm{adm}} = \left\{ v \in \mathbb{L}^2;\, a \leq v \leq b \right\}.$$

Zeigen Sie, daß für alle $u \in \mathscr{U}_{\mathrm{adm}}$ gilt:

$$\nabla \widehat{J}(u)(x) = \begin{cases} = 0\,, & \text{für } a(x) < u(x) < b(x)\,, \\ \geq 0\,, & \text{für } a(x) = u(x) < b(x)\,, \\ \leq 0\,, & \text{für } a(x) < u(x) = b(x) \end{cases} \qquad \text{für fast alle } x \in \mathcal{O}\,.$$

**Abgabe: 14.1.2019 im Tutorium.**