EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 12.12.2018**

Übungsaufgaben 7

Problem 1. a) Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, Lipschitz. Überprüfen Sie, ob nachfolgende Abbildungen Frechet-differenzierbar sind:

a) $e : [\mathbb{H}_0^1]^2 \to [\mathbb{H}^{-1}]^2$ via: $e(\mathbf{u}) = -\Delta \mathbf{u} + [\mathbf{u} \cdot \nabla]\mathbf{u}\,.$

b) $e : \mathbb{H}_0^1 \to \mathbb{R}$ via: $e(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \frac{1}{4}\|u\|_{\mathbb{L}^4}^2$.

Hierbei ist $[\mathbf{u} \cdot \nabla]$ der Operator $u_1\partial_1 + u_2\partial_2$.

Problem 2. Betrachten Sie nochmals Problem 1, b), und hierfür die Minimierungsaufgabe:

$$\min_{u \in \mathbb{H}_0^1} e(u)\,.$$

a) Existiert ein Minimum? Ist dieses eindeutig?

b) Geben Sie die Schritte des Gradientenverfahrens mit Armijo-Schrittweitenregel an.

Problem 3. Diskutieren Sie die Lösbarkeit des folgenden Problems: Sei $2 \leq p < \infty$, $D \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, Lipschitz, und $\widetilde{y} \in C(D)$. Minimiere

$$\mathcal{J}(y,u) = \int_D |u|^2 + |y - \widetilde{y}|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} \qquad \text{u.d.N.} \qquad \begin{cases} -\Delta_p y + y = u & \text{auf } D\,, \\ y = 0 & \text{auf } \partial D\,. \end{cases}$$

Abgabe: 17.12.2018 im Tutorium.