EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 3.12.2018**

Übungsaufgaben 6

Problem 1. Seien $0 < T < \infty$, $\vec{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ Lipschitz ($1 \leq n, m < \infty$), sowie $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\widetilde{\vec{y}} \in \mathscr{C}([0,T]; \mathbb{R}^n)$ gegeben. Gesucht ist ein Minimum $(\vec{y}^*, \vec{u}^*)$ von:

$$\mathcal{J}(\vec{y}, \vec{u}) = \int_0^T |\vec{u}(s)|^2_{\mathbb{R}^m} + |\vec{y}(s) - \widetilde{\vec{y}}(s)|^2_{\mathbb{R}^n} \, \mathrm{d}s \qquad \text{u.d.N.} \qquad \dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}, \vec{u}) \quad (0 < t < T), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0 \, . \tag{1}$$

Die Lösbarkeit dieser Optimierungsaufgabe werden wir in Kürze nachholen.

Zur Approximation eines Minimums wollen wir das *implizite Eulerverfahren* auf dem äquidistanten Gitter $I_k := \{t_j\}_{j=0}^{[\frac{T}{k}]}$ mit Gitterweite $k > 0$ zur Diskretisierung der ODE in (1) verwenden.

a) Wie lautet das endlich-dimensionale Optimierungsproblem? Existiert eine Lösung für jedes feste $k > 0$?

b) Sei zusätzlich $f \in \mathscr{C}^1_{\mathsf{b}}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$. Wie lauten die KKT-Bedingungen?

Problem 2. Anstelle der ODE als Gleichungsbedingung in (1) betrachten wir nun eine PDE – die lineare Wärmeleitungsgleichung.

Die Optimierungsaufgabe lautet nun: Gegeben seien ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$, sowie $\widetilde{y} \in C([0,T] \times D)$, und $y_0 \in \mathbb{L}^2$. Gesucht ist ein Minimum (y^*, u^*) von:

$$\mathcal{J}(y, u) = \int_0^T \|\vec{u}(s)\|^2_{\mathbb{L}^2} + \|y(s) - \widetilde{y}(s)\|^2_{\mathbb{L}^2} \, \mathrm{d}s \qquad \text{u.d.N.} \qquad \left\{ \begin{aligned} y_t - \Delta y &= u && \text{auf } (0,T) \times D \, , \\ y &= 0 && \text{auf } (0,T) \times \partial D \, , \\ y(0, \cdot) &= y_0 && \text{auf } D \, . \end{aligned} \right. \tag{2}$$

(i) Existiert ein Minimum (y^*, u^*)? Ist dieses eindeutig?

(ii) Versuchen Sie, entsprechend Problem 1, eine Diskretisierung von Problem 2 *in Zeit und Ort*, und zeigen Sie die Lösbarkeit dieser Optimierungsaufgabe.

(iii) Leiten Sie entsprechend die KKT-Bedingungen der Optimierungsaufgabe aus (ii) her.

Abgabe: 10.12.2018 im Tutorium.