EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 19.11.2018**

Übungsaufgaben 5

Problem 1. Betrachten Sie nochmals Problem 2 auf Übungsblatt 4; dort hatten wir mithilfe einer Zeitdiskretisierung eine schwache Lösung einer Anfangs-Randwertaufgabe konstruiert ('Rothe-Methode').

Versuchen Sie einen alternativen Beweis, der eine Galerkin-Diskretisierung (im Ort) verwendet: sei hierzu zur Vereinfachung $\mathcal{O} = (0,1)$ das Gebiet, und verwenden Sie endlich-dimensionale Ansatzräume $\mathbb{X}_N$, wie sie in Problem 1 auf Übungsblatt 4 eingeführt wurden.

Problem 2. Betrachten Sie nochmals Problem 2 auf Übungsblatt 4; in der Vorlesung haben wir hierfür eine schwache Lösung $u : [0,T] \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ konstruiert:

a) Zeigen Sie, daß folgende Abschätzung gilt:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2}^2 + \int_0^T \|\nabla u\|_{L^2}^2 \, \mathrm{d}s + \int_0^T \|\partial_t u\|_{H^{-1}}^2 \, \mathrm{d}s \leq C \,,$$

$C \equiv C(\|u_0\|_{L^2}, \|f\|_{L^2(0,T;W^{-1,2})}) > 0$.

b) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der schwachen Lösung.

c) Vergleichen Sie (die Herleitung von) a) mit der entsprechenden von b$_1$) in Problem 2) auf Übungsblatt 4: versuchen Sie eine numerische Interpretation des dort zusätzlich in der Analyse auftretenden Terms.

Problem 3. In der Vorlesung haben wir mithilfe des impliziten Euler-Verfahrens eine schwache Lösung insbesondere eines allgemeinen, linearen Evolutionsproblems konstruiert: speziell wollen wir folgendes Evolutionsproblem betrachten auf $\mathcal{O} = (0,1)$ und bis zu einer endlichen Zeit $T > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + u &= f \quad \text{in } (0,T) \times \mathcal{O} \,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } (0,T) \times \partial\mathcal{O} \,, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{in } \mathcal{O} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Stellen Sie eine *implementierbare* Approximation von (2) mithilfe von implizitem Euler (Zeit) und Galerkin-Verfahren (Ort; vgl. Problem 1) auf:

a) Wie lauten die entsprechenden, pro Zeitschritt zu lösenden linearen Gleichungssysteme?

b) Zeigen Sie Konvergenz dieser Approximation für verschwindende Diskretisierungsparameter.

Problem 4. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$, und $T = 1$. Gegeben sei das Problem: Finde ein $u : [0,T] \times \mathcal{O}$, sodaß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - u_{xx} + u u_x &= 0 \quad \text{in } (0,T) \times \mathcal{O}\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } (0,T) \times \partial\mathcal{O}\,, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \end{aligned} \tag{2}$$

mit $u_0 \in L^2$. Existiert eine schwache Lösung?

Abgabe: 03.12.2018 im Tutorium.