EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 12.11.2018**

Übungsaufgaben 4

Problem 1. Fixiere $N \in \mathbb{N}$. Verwende die *Diskretisierungs-Strategie aus Problem 1* zur Galerkin-Approximation von Problem 3. (beide Übungsblatt 3), das dann lautet: Finde

$$u_N \in \mathbb{X}_N := \left\{\varphi \in C(\overline{\mathcal{O}}) \cap W_0^{1,p}(\mathcal{O}) : \, u\big|_{[x_i,x_i+1]} \in \mathcal{P}_1([x_i, x_{i+1}]) \quad (0 \le i \le N-1)\right\},$$

sodaß

$$\big(|\nabla u_N|^{p-2}\nabla u_N, \nabla\varphi_N\big) + \big(u_N, \varphi_N\big) = (f, \varphi_N) \qquad \forall\, \varphi_N \in \mathbb{X}_N\,.$$

Da nichtlinear für jedes N, betrachten wir folgende Fixpunkt-Iteration: Sei $u_{N,0} = 0$. Für $\ell \in \mathbb{N}$ ist $u_{N,\ell} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ gesucht, sodaß

$$\big(|\nabla u_{N,\ell-1}|^{p-2}\nabla u_{N,\ell}, \nabla\varphi_N\big) + \big(u_{N,\ell}, \varphi_N\big) = (f, \varphi_N) \qquad \forall\, \varphi_N \in \mathbb{X}_N\,. \tag{1}$$

Besitzt (3) für jedes (N, ℓ) eine Lösung, und konvergiert $\{u_{N,\ell}\}_\ell \subset W_0^{1,p}$?

Problem 2. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, lipschitz, sei $T > 0$, sowie $u_0 \in H_0^1$ und $f \in C([0,T] \times \mathcal{O})$ gegeben. Wir betrachten folgende Anfangs-Randwertaufgabe: Finde $u : [0,T] \times \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \quad \text{in } (0,T) \times \mathcal{O}\,, \\ u &= 0 \quad \text{auf } (0,T) \times \partial\mathcal{O}\,, \\ u(0,\cdot) &= u_0 \quad \text{in } \mathcal{O}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Zur approximativen Lösung betrachten wir das *implizite Euler-Verfahren*: Sei hierzu $I_k := \{t_j\}_{j=0}^{\frac{T}{k}}$ ein Gitter mit (äquidistanter) Zeitschrittweite $k > 0$, das $[0,T]$ überdeckt, und o.E.d.A. gelte $\frac{T}{k} \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun die endliche (Funktionen-)Folge $\{u^j\}_{j=0}^{\frac{T}{k}}$, mit $u^0 = u_0$, und für jedes $1 \le j \le \frac{T}{k}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{u^j - u^{j-1}}{k} - \Delta u^j &= f(t_j, \cdot) \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \\ u^j &= 0 \qquad\quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, daß $u^j \in H_0^1$ existiert für jedes $1 \le j \le \frac{T}{k}$. Welches Funktional minimiert u^j jeweils?

b) Zeigen Sie folgende Abschätzungen:

$$\mathrm{b}_1) \qquad \max_{1\le j\le \frac{T}{k}} \frac{1}{2}\|u^j\|_{L^2}^2 + \sum_{1\le j\le \frac{T}{k}} k\|\nabla u^j\|_{L^2}^2 \le C_0\,,$$

$$\mathrm{b}_2) \qquad \max_{1\le j\le \frac{T}{k}} \frac{1}{2}\|\nabla u^j\|_{L^2}^2 + \sum_{1\le j\le \frac{T}{k}} k\Big\|\frac{u^j - u^{j-1}}{k}\Big\|_{L^2}^2 \le C_1\,,$$

mit einer Konstante $C_i \equiv C_i(\|u_0\|_{W^{i,2}}, \|f\|_{L^2(0,T;W^{-1+i,2})}) > 0$, für $i \in \{0,1\}$.

Problem 3. Das auf (3) basierende Verfahren ist nur eine *Semi-Diskretisierung* – zur tatsächlichen Implementierung ist noch eine Ortsdiskretisierung notwendig.

Sei nachfolgend $\mathcal{O} = (0,1)$. Verfahren Sie wie vorgestellt in Problem 1 zur Konstruktion besagter Ortsdiskretisierung. Zeigen Sie, daß eine Lösung $u_N \in \mathbb{X}_N$ existiert, und daß diese wiederum $\mathrm{b}_1)$ und $\mathrm{b}_2)$ aus Problem 2 erfüllt.

Abgabe: 19.11.2018 im Tutorium.