EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 5.11.2018**

Übungsaufgaben 3

Problem 1. Wir wollen die Minimierungsaufgabe in Problem 1 von Übungsblatt 2 numerisch lösen, mit $\mathcal{O} = (0, 1)$, und $f \in C(\overline{\mathcal{O}})$. Hierzu *diskretisieren* wir obige Problemstellung wie folgt:

- Wir überdecken $\overline{\mathcal{O}}$ mit einem äqui-distanten Gitter $\mathcal{G}_h = \{x_i\}_{i=0}^N$ der Feinheit $h = \frac{1}{N}$, mit $N \in \mathbb{N}$, und wählen $x_0 = 0$ und $x_N = 1$.
- Im Zuge der Minimierung erlauben wir nur stückweise affine Funktionen $u \in C_0(\overline{\mathcal{O}})$, sodaß $u\big|_{[x_i, x_i+1]} \in \mathcal{P}_1([x_i, x_{i+1}])$ $(0 \leq i \leq N-1)$.

Wie lautet das *endlich-dimensionale* Optimierungsproblem? Benutzen Sie das Gradientenverfahren zur Angabe einer iterativen Lösungsvorschrift.

Problem 2. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt, lipschitz, und $2 \leq p < \infty$. Sei $f \in L^2(\mathcal{O})$. Gesucht ist eine schwache Lösung von

$$-\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\big) + u = f \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,. \tag{1}$$

a) Ordnen Sie dieser Randwert-Aufgabe eine Minimierungsaufgabe zu und diskutieren Sie dessen Lösbarkeit. Ist das Minimum eindeutig? Stimmen Minimierer und schwache Lösung von (1) überein?

b) Ist der Satz von Browder-Minty anwendbar, um Lösbarkeit von (1) zu etablieren? Wie überzeugt man sich von der Eindeutigkeit der Lösung?

Problem 3. Wir wollen die Randwertaufgabe in Problem 2 diskretisieren, und verwenden hierzu die in Problem 1 vorgestellten Methoden. Es seien hierzu $\mathcal{O} = (0, 1)$, und $f \in C(\overline{\mathcal{O}})$. Wie lautet das zu (1) gehörende Gleichungssystem?

P.S.: In der Vorlesung wurde an dieser Stelle von einem (abstrakten) *Galerkin-Verfahren* gesprochen: an dieser Stelle haben wir ein konkretes.

Problem 4.

a) Wiederholen Sie den Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes.

b) Fixiere $N \in \mathbb{N}$. Verwende die *Diskretisierungs-Strategie aus Problem 1* zur Galerkin-Approximation von Problem 3., das dann lautet: Finde

$$u_N \in \mathbb{X}_N := \left\{ \varphi \in C(\overline{\mathcal{O}}) \cap H_0^1(\mathcal{O}) : \, u\big|_{[x_i, x_i+1]} \in \mathcal{P}_1([x_i, x_{i+1}]) \quad (0 \leq i \leq N-1) \right\},$$

sodaß

$$\big(|\nabla u_N|^{p-2} \nabla u_N, \nabla \varphi_N \big) + \big(u_N, \varphi_N \big) = 0 \qquad \forall \, \varphi_N \in \mathbb{X}_N \, .$$

Da nichtlinear für jedes N, betrachten wir folgende Fixpunkt-Iteration: Sei $u_{N,0} = 0$. Für $\ell \in \mathbb{N}$ ist $u_{N,\ell} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ gesucht, sodaß

$$\big(|\nabla u_{N,\ell-1}|^{p-2} \nabla u_{N,\ell}, \nabla \varphi_N \big) + \big(u_{N,\ell}, \varphi_N \big) = 0 \qquad \forall \, \varphi_N \in \mathbb{X}_N \, . \tag{2}$$

Besitzt (2) für jedes (N, ℓ) eine Lösung, und konvergiert $\{u_{N,\ell}\}_\ell \subset H_0^1$?

Abgabe: 12.11.2018 im Tutorium.