EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 23.10.2018**

Übungsaufgaben 2

Problem 1. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Lipschitzgebiet, und $f \in L^2$ sei gegeben. Betrachte die Minimierungsaufgabe: Finde $u^\star : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, mit $u^\star\big|_{\partial\mathcal{O}} = 0$, sodaß

$$\mathcal{J}(u^\star) = \min_{\varphi:\mathcal{O}\to\mathbb{R},\, \varphi\big|_{\partial\mathcal{O}}=0} \mathcal{J}(\varphi)\,, \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{J}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{O}} |\nabla\varphi|^2 \,\mathrm{d}\vec{x} - \int_{\mathcal{O}} f\varphi \,\mathrm{d}\vec{x}\,.$$

a) Existiert ein Minimum (in welchem Raum)? Ist dieses eindeutig?

b) Wie kann man a) nutzen, um zum Nachweis der Lösbarkeit von: Finde $u : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}$$

nicht das Lemma von Lax-Milgram zu verwenden?

Problem 2. Sei $1 < q < \infty$, und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, lipschitz. In der Vorlesung haben wir nachgewiesen, daß ein Minimierer $u^\star \in W_0^{1,q}$ existiert, sodaß

$$\mathcal{J}(u^\star) = \min_{\varphi\in W_0^{1,q}} \mathcal{J}(\varphi)\,,$$

falls die beteiligte Funktion $\mathcal{L} : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Annahme (A1) erfüllt.

Zeigen Sie folgende Existenzaussage: Sei $1 < p < \infty$, und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, lipschitz, sowie $g \in L^q(\partial\mathcal{O})$. Sei

$$\mathbb{X} := \big\{\varphi \in W^{1,q}(\mathcal{O});\ \varphi = g \text{ auf } \partial\mathcal{O}\big\} \neq \emptyset\,.$$

Es gelte (A1). Dann existiert ein $u^\star \in \mathbb{X}$, sodaß

$$\mathcal{J}(u^\star) = \min_{\varphi\in\mathbb{X}} \mathcal{J}(\varphi)\,.$$

P.S.: Wiederholen Sie im Rahmen dieser Problemstellung den Begriff: *Spur* (engl. 'trace') einer Abbildung $\varphi \in W^{1,q}(\mathcal{O})$.

Problem 3. Sei $1 < q < \infty$, und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, lipschitz. Es sei $\mathfrak{L} \in \mathscr{C}^1$ derartig, daß für alle $\vec{x} \in \mathcal{O}$ gilt:

$$(z, \vec{p}) \mapsto \mathfrak{L}(\vec{x}, z, \vec{p}) \quad \text{ist konvex.}$$

Dann ist jede schwache Lösung $u \in \mathbb{W}_0^{1,q}$ der Euler-Lagrange-Gleichung auch Minimierer, also

$$\mathcal{J}(u) = \min_{\varphi \in \mathbb{W}_0^{1,q}} \mathcal{J}(\varphi)\,.$$

Abgabe: 5.11.2018 im Tutorium.