EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 21.1.2019**

Übungsaufgaben 10

Problem 1. In der Vorlesung hatten wir folgende Minimierungsaufgabe: Sei $T > 0$ fest, und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ $(1 \leq d \leq 3)$ beschränkt, Lipschitz. Gegeben seien $y_0, y_{\mathrm{geg}} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O})$, sowie $a, b \in L^\infty(0,T;\mathbb{L}^\infty(\mathcal{O}))$, mit $a \leq b$ f.ü. Gesucht ist ein Minimum von

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y(T,\cdot) - y_{\mathrm{geg}}\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})} + \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}\,\mathrm{d}t \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{cases} \partial_t y - \Delta y = u & \text{auf } \mathcal{O}_T := (0,T)\times\mathcal{O}\,, \\ y = 0 & \text{auf } (0,T]\times\partial\mathcal{O}\,, \\ y(0,\cdot) = y_0 & \text{auf } \mathcal{O}\,, \\ a \leq u \leq b & \text{auf } (0,T]\times\mathcal{O} \end{cases}$$

Überprüfen Sie *sämtliche* Forderungen in (A1) und (A2).

Problem 2. Wir modifizieren **Problem 1** in der folgenden Weise: sei $y_{\mathrm{geg}} \in L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\mathcal{O}))$. Gesucht ist ein Minimum von

$$J(y,u) = \frac{1}{2}\|y(T,\cdot) - y_{\mathrm{geg}}\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\mathcal{O}))} + \frac{1}{2}\int_0^T \|u(t,\cdot)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathcal{O})}\,\mathrm{d}t \quad \text{u.d.N.} \quad \begin{cases} \partial_t y - \Delta y = u & \text{auf } \mathcal{O}_T\,, \\ y = 0 & \text{auf } (0,T]\times\partial\mathcal{O}\,, \\ y(0,\cdot) = y_0 & \text{auf } \mathcal{O}\,, \\ a \leq u \leq b & \text{auf } (0,T]\times\mathcal{O} \end{cases}$$

Überprüfen Sie wiederum sämtliche Forderungen in (A1) und (A2). Wie lauten die notwendigen Optimalitätsbedingungen (in starker Form)?

Problem 3. Sei $T > 0$ fix, und $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt, Lipschitz. Gegeben seien $\mathbf{y}_0 \in [\mathbb{L}^2(\mathcal{O})]^2$, und $\mathbf{y}_{\mathrm{geg}} \in \left[L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\mathcal{O}))\right]^2$. Gesucht ist ein Minimum von

$$J(\mathbf{y},\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{y}(T,\cdot) - \mathbf{y}_{\mathrm{geg}}\|^2_{[L^2(0,T;\mathbb{L}^2(\mathcal{O})]^2)} + \frac{1}{2}\int_0^T \|\mathbf{u}(t,\cdot)\|^2_{[\mathbb{L}^2(\mathcal{O})]^2}\,\mathrm{d}t$$

unter der Nebenbedingung ($i \in \{1,2\}$)

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{y} - \Delta \mathbf{y} + \mathbf{N}_i(\mathbf{y}) = \mathbf{u} & \text{auf } \mathcal{O}_T\,, \\ \mathbf{y} = \mathbf{0} & \text{auf } (0,T] \times \partial\mathcal{O}\,, \\ \mathbf{y}(0,\cdot) = \mathbf{y}_0 & \text{auf } \mathcal{O}\,, \end{cases}$$

mit $\mathbf{N}_1(\mathbf{y}) = \frac{1}{4}\big(|\mathbf{y}|^2 - 1\big)\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{N}_2(\mathbf{y}) = [\mathbf{y} \cdot \nabla]\mathbf{y}$ (vgl. Problem 1 auf Übungsblatt 7 bzgl. Notation). Wie lauten die Optimalitätsbedingungen (in starker Form)?

Abgabe: 28.1.2019 im Tutorium.