EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl

Optimierung mit Differentialgleichungen

Wintersemester 18 **Tübingen, 23.10.2018**

Übungsaufgaben 1

Problem 1. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$. Betrachte hierauf die Folge $\{f_n\}_n \subset L^2(\mathcal{O})$, mit $f_n(x) = \sin(\frac{2\pi}{n}x)$. Zeigen Sie, daß

$$f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^2(\mathcal{O}) \qquad (n \uparrow \infty)\,.$$

Konvergiert diese Folge auch stark in $L^2(\mathcal{O})$ gegen die Nullfunktion?

Problem 2. Sei $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ beschränktes Lipschitz-Gebiet. Gegeben seien $f \in L^2(\mathcal{O})$, sowie $\boldsymbol{\beta} \in C^1(\mathcal{O};\mathbb{R}^3)$, sodaß $\mathrm{div}\boldsymbol{\beta} = 0$. Gesucht ist eine Abbildung $u : \overline{\mathcal{O}} \to \mathbb{R}$, sodaß

$$-\Delta u + \boldsymbol{\beta}\cdot\nabla u + u = f \quad \text{in } \mathcal{O}\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\mathcal{O}\,.$$

Existiert eine schwache Lösung?

Problem 3. Sei $\mathcal{O} = (0,1)$. Diskutieren Sie die Lösbarkeit folgender Minimierungsaufgaben

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\mathcal{O}} \mathcal{L}\big(x, u(x), \nabla u(x)\big)\,\mathrm{d}x \to \min!$$

i) für $\mathcal{L}\big(x,u,p\big) = xp^2$, und mit der Vorgabe: $u(0) = u(1) = 0$,

ii) für $\mathcal{L}\big(x,u,p\big) = \sqrt{u^2+p^2}$, und mit der Vorgabe: $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$.

Abgabe: 31.10.2018 in der Vorlesung.