EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Nichtlineare Optimierung

Sommersemester 18 **Tübingen, 02.06.2018**

Übungsaufgaben 6

Problem 1. Die *KKT*-Bedingungen gelten, wenn *ACQ* erfüllt ist. Diese Bedingung ist nicht stets leicht zu verifizieren, was der Grund für die Relevanz der folgenden *Mangasarian-Formovitz-Constraint-Qualification* (*MFCQ*) ist.

Ein Punkt $x \in \mathscr{X} \equiv \mathscr{X}_{g,h} = \Big\{x \in \mathbb{R}^n : h_j(x) = 0 \ \ (1 \leq j \leq p),\ g_i(x) \leq 0 \ \ (1 \leq i \leq m)\Big\}$ erfüllt *MFCQ*, wenn

(i) $\big\{\nabla h_j(x) : 1 \leq j \leq p\big\}$ linear unabhängig sind,

(ii) $\exists\, d \in \mathbb{R}^n : \big\langle \nabla g_i(x), d\big\rangle_{\mathbb{R}^n} < 0 \ (i \in I(x))$, und $\big\langle \nabla h_j(x), d\big\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \ (1 \leq j \leq p)$.

(Beachte, daß (ii) ersetzt werden kann durch: $\exists\, d \in \mathcal{T}_{\text{strict}}(x)$; siehe Problem 4 auf Aufgabenblatt 5).

a) Man zeige, daß $x \in \mathscr{X}$ der *ACQ* genügt, wenn er *MFCQ* genügt.

b) Betrachte $\mathscr{X} := \mathscr{X}_g \subset \mathbb{R}^2$, mit $g_1(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2,\ \ g_2(x_1, x_2) = -x_2$. Man zeige, daß $(0,0)$ nicht *MFCQ* erfüllt, aber *ACQ*.

Hinweis: für a). Zeigen Sie, daß $e \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(x)$ impliziert, daß $e \in \mathcal{T}_{\mathscr{X}}(x)$. Betrachten Sie hierzu wieder $e_k := e + \frac{1}{k} d \ (k \in \mathbb{N})$, wobei d aus (ii) ist. Offensichtlich ist $e_k \in \mathcal{T}_{\text{lin}}(x)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wie in Problem 1 von Aufgabenblatt 5 existiert für jedes k ein C^1-Weg $X_k : (-\epsilon_k, \epsilon_k) \mapsto \mathbb{R}^n$, sodaß $h(X_k(t)) = 0 \ \ \forall |t| < \epsilon_k,\ \ X_k(0) = x, X_k'(0) = e_k$.

Problem 2. Sei $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ ein *KKT*-Punkt des Optimierungsproblems:

$$\min f(x) \qquad \text{sodaß} \qquad x \in \mathscr{X} = \mathscr{X}_{g,h} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0,\ h(x) = 0\big\}, \tag{1}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p$ jeweils stetig differenzierbar. Man zeige, daß x^* ein stationärer Punkt von (1) ist, also gilt,

$$\big\langle \nabla f(x^*), d\big\rangle \geq 0 \qquad \forall d \in \mathcal{T}_{\mathscr{X}}(x^*).$$

Problem 3. Sei $C : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ gegeben via

$$C(y) = \begin{cases} (y-1)^2 & \text{für } \; y > 1 \\ 0 & \text{für } \; -1 \le y \le 1 \\ (y+1)^2 & \text{für } \; y < -1 \end{cases} \quad .$$

Wir definieren $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gemäß

$$g_1(x_1, x_2) = C(x_1) - x_2, \qquad g_2(x_1, x_2) = C(x_1) + x_2.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, konvex. Betrachte die Minimierungsaufgabe

$$\min f(x) \qquad \text{sodaß} \qquad x \in \mathscr{X} = \mathscr{X}_g = \big\{ x \in \mathbb{R}^2 : g_i(x_1, x_2) \le 0 \ (1 \le i \le 2) \big\}.$$

Man zeige, daß das Problem nicht *Slater*'s Bedingung erfüllt, aber z.B. *ACQ* am Punkt $x = (0, 0)$ erfüllt ist.

Problem 4. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ c \in \mathbb{R}^n$, und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Betrachte das primale lineare Programm

$$\min \langle c, x \rangle \qquad \text{u.d.N.} \qquad Ax = b, \ \ x \ge 0,$$

und auch das zugehörige duale Problem

$$\min \langle b, \lambda \rangle \qquad \text{u.d.N.} \qquad A^T \lambda + s = c, \ \ s \ge 0.$$

a) Zeigen Sie, daß die zugehörigen Optimalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} A^T \lambda + s &= c \\ Ax &= b \\ x_i \ge 0, \ s_i \ge 0, \ x_i s_i &= 0 \quad (1 \le i \le n) \end{aligned}$$

äquivalent sind zu den *KKT*-Bedingungen für beide Probleme – das primale und das duale.

b) Zeigen Sie, daß das duale Problem, das Sie dem dualen Problem zuordnen, wieder das primale Problem ist.

Abgabe: 08.06.2018.