EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Nichtlineare Optimierung

Sommersemester 18 **Tübingen, 18.05.2018**

Übungsaufgaben 5

Problem 1. Sei $x \in \mathscr{X} = \{z \in \mathbb{R}^n : h_j(z) = 0 \ (1 \le j \le p)\}$ ein regulärer Punkt, und $h_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, daß für jeden Tangentialvektor $y \in \mathscr{T}_{\mathscr{X}}(x)$ ein Weg $\psi : (\epsilon, \epsilon) \to \mathscr{X}$ existiert, sodaß

$$\psi(0) = x\,, \qquad \psi'(0) = y\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.

Problem 2. Seien $h_j \in C^2(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le j \le p)$, und $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Der reguläre Punkt $x^* \in \mathscr{X}$ sei ein lokales Minimum von f auf

$$\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : h_j(z) = 0 \quad (1 \le j \le p)\}\,.$$

Zeigen Sie, daß

$$\langle y, \nabla^2 \mathscr{L}(x^*, \lambda) y \rangle \ge 0 \qquad \forall y \in \mathscr{T}_{\mathscr{X}}(x^*)\,,$$

wobei $\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ die Lagrange-Funktion ist.

Hinweis: Verwenden Sie wieder einen Weg $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathscr{X}$, mit $\psi(0) = x^*$ und $\psi'(0) = y$.

Problem 3.

a) Seien $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, und $h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2$. Wir betrachten

$$\min f(x_1, x_2) \qquad \text{u.d.N.} \qquad (x_1, x_2) \in \mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\}\,.$$

Bestimmen Sie ein Minimum $x^* \in \mathscr{X}$ mithilfe der Optimalitätsbedingungen.

b) Seien $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, mit

$$h_1(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1, \quad h_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 4\,.$$

Betrachten Sie das restringierte Minimierungsproblem

$$\min f(x_1, x_2) \qquad \text{u.d.N.} \qquad (x_1, x_2) \in \mathscr{X} = \left\{ z \in \mathbb{R}^2 : h_1(z) = 0 = h_2(z) \right\},$$

mit f aus Teil $a)$. Begründen Sie, warum das Problem ein lokales Minimum an der Stelle $x^* = 0$ besitzt, aber *kein* Lagrange-Multiplikator für dieses lokale Minimum existiert.

Problem 4. Sei $f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le i \le m)$ konvex, und $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ affin. Sei x^* eine Lösung von

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in \mathscr{X} := \Big\{ y \in \mathbb{R}^n : g_i(y) \le 0 \quad (1 \le i \le m), \qquad h_j(y) = 0 \quad (i \le j \le p) \Big\}.$$

Wir definieren

$$\mathcal{T}_{\text{strict}}(x^*) = \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \big\langle \nabla g_i(x^*), d \big\rangle < 0 \quad \forall i \in \mathscr{I}(x^*), \qquad \big\langle \nabla h_j(x^*), d \big\rangle = 0 \quad (1 \le j \le p) \Big\}.$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{T}_{\text{strict}}(x^*) \subset \mathcal{T}_{\mathscr{X}}(x^*)$.

Abgabe: 01.06.2018.