EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-
Naturwissenschaftliche
Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

# Nichtlineare Optimierung

**Sommersemester 18** **Tübingen, 11.05.2018**

## Übungsaufgaben 4

**Problem 1.**

a) Sei $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n$ nichtleere Menge, and $\mathcal{H}(\mathscr{X})$ ihre konvexe Hülle. Zeigen Sie, daß sich jedes $x \in \mathcal{H}(\mathscr{X})$ darstellen läßt als Konvex-Kombination von **höchstens** $n+1$ Elementen aus $\mathscr{X}$.

b) Sei $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n$ zusätzlich konvex, und $f : \mathscr{X} \mapsto \mathbb{R}$ eine konvexe Function. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$,

$$f\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \quad \forall x_i \in \mathscr{X} \qquad \forall \lambda_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

**Problem 2.** Sei $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge, und $y \in \mathbb{R}^n \setminus \mathscr{X}$. Zeigen Sie, daß ein Vector $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und eine Zahl $\beta \in \mathbb{R}$ derart existieren, daß

$$\langle a, x\rangle < \beta < \langle a, y\rangle \qquad \forall x \in \mathscr{X}.$$

**Problem 3.** Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ derart, daß

$$m\|y\|^2 \leq \big\langle y, \nabla^2 f(x) y\big\rangle \leq M\|y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

wobei $m$ und $M$ positive Zahlen sind. Sei $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie, daß $f$ ein globales Minimum $x^*$ über $\mathscr{X}$ besitzt, das

$$\Theta_M(x) \leq f(x) - f(x^*) \leq \Theta_m(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

erfüllt; hierbei verwenden wir folgende Bezeichnung für alle $\delta > 0$,

$$\Theta_\delta(x) = -\min_{y \in \mathscr{X}} \big\{\big\langle \nabla f(x), y - x\big\rangle + \frac{\delta}{2}\|y - x\|^2\big\}.$$

**Problem 4.** Sei $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n$ ein Polyeder und $f \in C^2(\mathscr{X})$. Zeigen Sie, daß $x^* \in \mathscr{X}$ ein lokales Minimum von $f$ ist, falls

$$\left\langle \nabla f(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathscr{X}$$

und

$$\left\langle x - x^*, \nabla^2 f(x^*)[x - x^*] \right\rangle > 0 \qquad \forall x \in \Big\{ y \in \mathscr{X} : y \neq x^* \quad \text{und} \quad \left\langle \nabla f(x^*), y - x^* \right\rangle = 0 \Big\}.$$

**Hinweis:** Argumentieren Sie via Widerspruch, wobei Sie annehmen, daß $x^*$ kein lokales Minimum sei. Dann existiert eine Folge $\{x^{(k)} : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{X}$, die gegen $x^*$ konvergiert, sodaß $f(x^{(k)}) < f(x^*)$.

**Abgabe: 18.05.2018.**