EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

**Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät**

**Fachbereich Mathematik**

**Prof. Dr. Andreas Prohl**
**Cedric Beschle**

# Nichtlineare Optimierung

**Sommersemester 18** **Tübingen, 05.05.2018**

## Übungsaufgaben 3

**Problem 1.** Sei $-\infty < K \leq f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit einem $K \in \mathbb{R}$, und $f$ sei gleichmäßig konvex und koerciv.

a) Seien $\{x^{(t)} : t \in \mathbb{N}_0\}$ die Iterierten des globalisierten Newton-Verfahrens. Zeigen Sie, daß die gesamte Folge $\{x^{(t)} : t \in \mathbb{N}_0\}$ gegen das Minimum $x^* \in \mathbb{R}^n$ konvergiert.

b) Sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x^*\}$. Zeigen Sie, daß $r = -[\nabla^2 f(x)]^{-1} \nabla f(x)$ eine Abstiegsrichtung ist.

c) Wähle $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Zeigen Sie, daß ein $\varepsilon > 0$ hinreichend klein existiert, sodaß für alle $x \in \mathscr{B}_\varepsilon(x^*) \setminus \{x^*\}$, und alle $r \in \mathbb{R}^n$ gemäß Teil $b)$ gilt:

$$f(x + \alpha r) - f(x) \leq \alpha\gamma \langle \nabla f(x), r \rangle \qquad \forall\, \alpha \in (0, 1]\,.$$

**Problem 2.** Betrachte $\mathscr{X} = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ für gegebene $\alpha_i < \beta_i$ $(1 \leq i \leq n)$, und festes $f \in C^1(\mathscr{X})$. Betrachte die restringierte Minimierungsaufgabe:

$$\min_{x \in \mathscr{X}} f(x)\,.$$

a) Zeige, daß ein lokales Minimum $x^*$ erfüllt:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \geq 0 & \text{für } x_i^* = \alpha_i\,, \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} \leq 0 & \text{für } x_i^* = \beta_i\,, \\ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = 0 & \text{für } \alpha_i < x_i^* < \beta_i\,. \end{cases} \tag{1}$$

Hinweis: Nutze die notwendige Optimalitätsbedingung

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathscr{X}\,.$$

b) Sei zusätzlich $f$ konvex. Zeigen Sie, daß dann (1) auch hinreichend für die Optimalität von $x^*$ ist.

**Problem 3.** Sei $x^*$ ein lokales Minimum der zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ auf der konvexen Menge $\mathscr{X}$ aus **Problem 2.**. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\left\langle x - x^*, \nabla^2 f(x^*)(x - x^*) \right\rangle \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathscr{X}\ ,$$

wenn $\left\langle \nabla f(x^*), x - x^* \right\rangle = 0$ für alle $x \in \mathscr{X}$.

**Problem 4**.

a) Seien $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei konvexe Mengen. Zeigen Sie, daß $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ konvex ist.

b). Die konvexe Hülle $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ einer Menge $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ist die Familie sämtlicher Konvex-Kombinationen von $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ die kleinste konvexe Menge ist, die $\mathcal{C}$ enthält.

**Abgabe: 11.05.2018.**