EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Nichtlineare Optimierung

Sommersemester 18 **Tübingen, 27.04.2018**

Übungsaufgaben 2

Problem 1. Seien $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{spd}}$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Betrachte die quadratische Funktion

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle x, \boldsymbol{Q}x\rangle - \langle c, x\rangle. \tag{1}$$

i) Zeige, daß f sein Minimum an der Stelle $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann annimmt, wenn $\boldsymbol{Q}x^* = c$.

ii) Berechne $\{(x_k, r_k, \alpha_k) : 0 \le k \le 4\}$ mithilfe des Gradientenverfahrens für die Funktion f aus (1), mit

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ mit } x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Problem 2.

i) Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Wähle ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x) \neq 0$. Sei $d^* \in \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ eine Lösung von

$$\min_{d\in\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla f(x), d\rangle .$$

Zeige, daß $d^* = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$ die einzige Lösung ist.

ii) Betrachte das verallgemeinerte Gradientenverfahren

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k, \qquad \text{mit} \qquad r_k = -\nabla f(x_k),\ k \in \mathbb{N},$$

wobei wieder $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Bestimme die Schrittweite $\alpha_k \in \mathbb{R}$ via

$$f(x_k + \alpha_k r_k) = \min_{\sigma\ge 0} f(x_k + \sigma r_k) .$$

Zeige, daß $r_{k+1} \perp r_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Problem 3. Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. In der Vorlesung wurden zulässige Suchrichtungen bzw. Schrittweiten definiert. Betrachte nun zulässige Suchrichtungen $\{r_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ und zulässige Schrittweiten $\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}_0\}$ für eine gegebene Folge $\{x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt von $\{x_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. Zeige, daß x^* ein stationärer Punkt von f ist.

Abgabe: 04.05.2018.