EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Aaron Beschle

Nichtlineare Optimierung

Sommersemester 18 **Tübingen, 20.04.2018**

Übungsblatt 1

Problem 1. Betrachte die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle x, \boldsymbol{Q}x\rangle + \langle c, x\rangle + \gamma,$$

wobei $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathsf{Sym}}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Zeige, daß

i) f konvex genau dann ist, wenn $\boldsymbol{Q}$ positiv semi-definit ist.

ii) f strikt konvex genau dann ist, wenn $\boldsymbol{Q}$ positiv definit ist.

Problem 2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum von f entlang jeder Gerade, die durch den Punkt x^* geht.

i) Zeige, daß $\nabla f(x^*) = 0$.

ii) Finde ein Beispiel, für das x^* kein lokales Minimum von f ist, obwohl es die obigen Eigenschaften besitzt.

Problem 3. Betrachte die quadratische Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle x, \boldsymbol{Q}x\rangle + \langle c, x\rangle\,, \tag{1}$$

mit $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathsf{Spd}}$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Sei $d \in \mathbb{R}^n$ eine Suchrichtung in $x \in \mathbb{R}^n$, und $\sigma^* \geq 0$ sei die Schrittweite, sodaß

$$f(x + \sigma^* d) = \min_{\sigma\geq 0} f(x + \sigma d)\,.$$

i) Diskutiere, warum $\sigma^* > 0$.

ii) Zeige, daß die Wahl $\sigma = \sigma^*$ sicherstellt, daß

$$f(x + \sigma d) - f(x) \leq \sigma\,\gamma\big\langle \nabla f(x), d\big\rangle \tag{2}$$

für alle $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$. Diese Ungleichung (2) ist bekannt als Armijo's Regel.

Problem 4. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Betrachte die Methode des steilsten Abstiegs,

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)\,.$$

i) Zeige, daß für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x_{k+1} - y\|^2 \le \|x_k - y\|^2 - 2\alpha_k\big(f(x_k) - f(y)\big) + \big(\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|\big)^2\,.$$

ii) Angenommen, es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \qquad \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 \to 0 \ \ (k \uparrow \infty)\,.$$

Zeige, daß dann gilt

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\,.$$

Hinweis: Argumentiere mit Widerspruch und verwende i).

Abgabe: 27.04.2018.