EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Nichtlineare Optimierung

Sommersemester 18 **Tübingen, 13.07.2018**

Übungsaufgaben 11

Problem 1. Betrachte das Problem:

$$\min \; f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad h(x) = 0.$$

Seien $f, h_j \in C^3$ für $1 \leq j \leq m$. Sei (x^*, λ^*) ein KKT-Punkt, mit

(i) $\{\nabla h_1(x^*), \cdots, \nabla h_m(x^*)\}$ linear unabhängig,

(ii) $\forall y \in \mathcal{T}_{\mathscr{X}}(x^*) \setminus \{0\}, \;\; \langle y, \nabla^2_{xx}\mathcal{L}(x^*, \lambda^*) y\rangle > 0.$

Zeigen Sie, daß die Lagrange-Newton Iteration konvergiert für alle Startdaten (x^0, λ^0) mit $\|x^0 - x^*\|$ hinreichend klein, und $\nabla^2\mathcal{L}(x^0, \lambda^0)$ regulär. Die Konvergenzrate ist quadratisch.

Problem 2. Sei $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\text{spd}}, \; c \in \mathbb{R}^n, \; \gamma \in \mathbb{R}$. Wir definieren $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ via

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, \boldsymbol{Q}x\rangle + \langle c, x\rangle + \gamma$$

Seien außerdem $\{a_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{b_j : 1 \leq j \leq p\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\{\alpha_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{\beta_j : 1 \leq j \leq p\} \subset \mathbb{R}$ gegeben. Betrachte

$$\min f(x) \;\; \text{u.d.N.} \;\; \begin{cases} \langle b_j, x\rangle = \beta_j & (1 \leq j \leq p) \\ \langle a_i, x\rangle \leq \alpha_i & (1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

Wir wollen zeigen, daß die 'aktive-Mengen'-Strategie wohldefiniert ist.

(i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Angenommen, $\{a_i : i \in \mathcal{A}_k\} \cup \{b_j : 1 \leq j \leq p\}$ sind linear unabhängig. Dann besitzt die lineare Gleichung

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q} & B_k^T & A_k^T \\ B & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^k \\ \lambda^k \\ \mu_{\mathcal{A}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung.

(ii) Sei $\{a_i : i \in \mathcal{A}_k\} \cup \{b_j : 1 \leq j \leq p\}$ linear unabhängig. Dann ist es auch $\{a_i : i \in \mathcal{A}_{k+1}\} \cup \{b_j : 1 \leq j \leq p\}$.

Abgabe: 20.07.2018.