EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät

Fachbereich Mathematik

Prof. Dr. Andreas Prohl
Cedric Beschle

Nichtlineare Optimierung

Sommersemester 18 **Tübingen, 06.07.2018**

Übungsaufgaben 10

Problem 1. Seien $f, g_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq m)$ stetig differenzierbar. Wir wollen das folgende Problem lösen:

$$\min\ f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0. \tag{1}$$

Die Barrieremethode wurde bereits früher eingeführt, mit Barrierefunktionen

$$\mathcal{B}_1(x,\alpha) := f(x) - \alpha \sum_{i=1}^{m} \ln(-g_i(x)) \quad \text{(logarithmische Barrierefunktion)}$$

$$\mathcal{B}_2(x,\alpha) := f(x) - \alpha \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)} \quad \text{(inverse Barrierefunktion)}$$

Fixiere jetzt $\tau > 0$.

(i) Leite die KKT-Bedingungen für (1) her und störe die Komplementaritätsbedingungen hin zu $\big\langle g(x^*), \lambda \big\rangle_{\mathbb{R}^m} = \tau$, um die notwendigen Optimalitsbedingungen 1. Ordnung für die Barrieremethode mit $\mathcal{B}_1$ zu erhalten.

(ii) Verfahre entsprechend, um die Barrieremethode mit $\mathcal{B}_2$ zu erhalten.

Problem 2. Betrachte die Optimierungsaufgabe:

$$\min f(x_1,x_2) = -x_1 x_2^2 \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x_1,x_2) := 1 - x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

a) Zeige, daß $x^* = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^T$ Lösungen des Problems sind, und $\mu^* = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ der zugehörige Lagrange-Multiplikator ist.

b) Für welche $\alpha \geq 0$ ist die Hessematrix $\nabla^2_{xx}\mathcal{L}_{\text{aug}}(x^*,\mu^*;\alpha) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des 'augmented Lagrangian'

$$\mathcal{L}_{\text{aug}}(x,\mu;\alpha) := f(x) + \mu h(x) + \frac{\alpha}{2}(h(x))^2$$

positiv definit?

c) Zeichne einige Niveaulinien für $\mathcal{L}_{\text{aug}}(\cdot,\mu^*;\alpha)$ zur Illustration, z.B. für $\alpha = 0$ und $\alpha = 0.6$.

d) Warum könnte es relevant sein, mithilfe des 'augmented Lagrangian'-Zugangs positive Definitheit zu erreichen?

Problem 3. Das Ziel soll es sein, mithilfe der Differenzenmethode approximativ folgendes 'optimales Kontrollproblem' zu lösen,

$$\begin{cases} \min f(y,u) := \int_0^T \left(|y(s)-\tilde{y}(s)|^2 + |u(s)|^2\right) ds + h(y(T)) \\ \qquad\qquad\qquad \text{u.d.N.} \\ y'(t) = a(t)y(t) + u(t), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $a, \tilde{y} : [0,T] \to \mathbb{R}$, und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene konvexe Funktion.

Verwenden Sie das explizite Euler-Verfahren, um (2) durch ein (endlich-dimensionales) Optimierungsproblem mit Gleichungs-Nebenbedingungen zu approximieren.

Abgabe: 13.07.2018.