

6. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker, Bio- und Medieninformatiker

**Aufgabe 8:** (Polynominterpolation)

Gegeben seien die Stützpunkte

|       |    |   |    |   |
|-------|----|---|----|---|
| $f_i$ | 7  | 1 | -1 | 7 |
| $x_i$ | -1 | 0 | 1  | 2 |

für  $i = 0, 1, 2, 3$ .

- Geben Sie das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die Stützpunkte mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange an.
- Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms, indem Sie die dividierten Differenzen berechnen.

**Aufgabe 9:** (Polynominterpolation)

Die Tschebyscheff-Polynome sind definiert durch:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Zeigen Sie, dass  $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$  für  $|x| \leq 1$ .

Besprechung in den Übungen am 05. und 06.06.2018.

Bitte wenden!

### Aufgaben Hausübung Blatt 3

#### Aufgabe 7\*: (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = 2x - e^{-x}$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  genau eine Nullstelle  $x^*$  im Intervall  $[0, 1]$  besitzt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$F_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x},$$
$$F_2(x) = -\ln(2x)$$

Iterationsverfahren zur Berechnung von  $x^*$  bilden, d.h. die Fixpunkte von  $F_i$  für  $i = 1, 2$  mit den Nullstellen von  $f$  übereinstimmen.

Welche der Funktionen sollte bei einer Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = F_i(x_k)$$

verwendet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

- (c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren für die Gleichung  $f(x) = 0$ .

#### Aufgabe 8\*: (4 Punkte)

Es sind die folgenden drei Datensätze gegeben:

- (a)  $(x, y) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ ,
- (b)  $(x, y) = \{(0, 0), (1, 0), (2, 1), (3, 0), (4, 0)\}$ ,
- (c)  $(x, y) = \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ .

Skizzieren Sie die Datensätze zuerst, um ein Gefühl für den Verlauf der zugrunde liegenden Funktion zu bekommen. Interpolieren Sie danach die Datensätze mittels Polynominterpolation.

#### Aufgabe 9\*: (4 Punkte)

In den Punkten  $x_j$  seien folgende Messwerte bekannt:

|       |    |   |   |
|-------|----|---|---|
| $x_j$ | -1 | 1 | 2 |
| $y_j$ | 2  | 6 | 4 |

- (a) Geben Sie eine interpolierende Funktion in der Basis  $\{(x+1)^2, (x-1)^2, (x-2)^2\}$  an.
- (b) Geben Sie eine interpolierende Funktion in der Basis  $\{\sin(\frac{\pi}{2}x), \cos(\frac{\pi}{2}x), \cos(\pi x)\}$  an.
- (c) Geben Sie das Interpolationspolynom  $p_2 \in P_2$  an.
- (d) Plotten Sie die drei interpolierenden Funktionen aus (a) - (c) in **einer** Figur im Intervall  $[-1.5, 2.5]$ .

**Schriftliche Abgabe der Hausübung in maximal Zweiergruppen am 04.06.2018 zu Beginn der Vorlesung.**

**Bitte wenden!**

## Programmieraufgabe

### Aufgabe P3: (4 Punkte)

Implementieren Sie den Algorithmus zur Berechnung der dividierten Differenzen zu vorgegebenen Stützpunkten  $(x_i, f_i)$  mit paarweise verschiedenen  $x_i$ . Realisieren Sie zudem die Auswertung des Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung durch das Horner-Schema. Die Matlab-Funktionen sollen folgende Form besitzen:

```
function a = DivDiff(x,f)                                function y = Horner(x,a)
    .                                                    .
    .                                                    .
    .                                                    .
end                                                       end
```

Testen Sie Ihr Programm mit den Daten

$$x_k = \frac{10k}{n} - 5, \quad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \dots, n,$$
$$x_k = 5 \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad f_k = \frac{1}{x_k^2 + 1}, \quad k = 0, \dots, n$$

für  $n = 4, 6, 8, 10$  und plotten Sie die Interpolationspolynome jeweils im Intervall  $[-5, 5]$  realisiert in einer Datei `main.m`.

Interpretieren Sie das Ergebnis.

**Abgabe der Programmieraufgabe in maximal Zweiergruppen bis zum 11.06.2018 um 10 h s.t. per E-Mail an [progtutor@na.uni-tuebingen.de](mailto:progtutor@na.uni-tuebingen.de).**

**Bitte beachten Sie die Informationen zur Abgabe auf der Homepage.**

Ansprechpartner: Sarah Eberle,  
[eberle@na.uni-tuebingen.de](mailto:eberle@na.uni-tuebingen.de) oder vereinbaren Sie einen Termin für meine Sprechstunde