Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Sarah Eberle

Tübingen, den 10.05.2016

5. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker, Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 8: (Positive Definitheit)
Beweisen Sie:
Eine Matrix A ist genau dann positiv definit in $\mathbb{R}^{n\times n}$, wenn die symmetrische Matrix $A+A^T$ positiv definit ist.

Aufgabe 9: (Ausgleichsproblem)
Bei der Messung des Zerfalls zweier radioaktiver Stoffe hat man zu verschiedenen Zeiten t_i die Strahlungsintensität s_i beobachtet:

t_i	0	1	2	3
s_i	4.30	1.48	0.56	0.24

Aufgrund der verschiedenen Halbwertszeiten ($\frac{1}{2}$ bzw. 1 Zeiteinheit) macht man für die Strahlungsintensität den Ansatz

$$s(t) = a_1 \cdot 2^{-2t} + a_2 \cdot 2^{-t}.$$

Bestimmen Sie die Parameter a_1, a_2 mit der Methode der kleinsten Quadrate, d.h.

$$\sum_{j=0}^{3} |s(t_j) - s_j|^2$$

soll minimal werden.

Besprechung in der Übung am 23.05.2016.

Bitte wenden!

Aufgaben Hausübung Blatt 2

Aufgabe 4*: (4 Punkte)

Berechnen Sie für die symmetrisch, positiv definite Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 29 & 16 \\ 6 & 16 & 17 \end{pmatrix}$ die Cholesky-Zerlegung $A = \bar{L}\bar{L}^T$ mit unterer Dreiecksmatrix $\bar{L} = LD^{\frac{1}{2}}$ (wobei $D^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{d_i})$, $i = 1, 2, 3$).

Aufgabe 5*: (4 Punkte)
Eine Ellipse $E \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $E = \{(x, y) \,|\, ax^2 + by^2 = 1\}$. Aus einer Zeichnung wird grob ausgemessen, dass die Punkte $(0, 3)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ auf der Ellipse liegen.

(a) Stellen Sie ein lineares Ausgleichsproblem zur Bestimmung von a und b aus den Messungen auf und lösen Sie dieses von Hand unter Verwendung der Normalengleichung.

(b) Vergleichen Sie die Kondition des Ausgleichsproblems mit der Kondition der Matrix aus der Normalengleichung.

(c) Plotten Sie die Ausgleichsellipse mit Matlab.

Aufgabe 6*: (4 Punkte)
Bei der Lösung linearer Ausgleichsprobleme $\|Ax - b\|_2$ ergibt sich häufig das Problem, neue Messdaten in eine schon vorhandene Reihe von Daten aufzunehmen, oder gewisse Messdaten zu entfernen.

(a) Wie verändert sich jeweils die Matrix A zu einer Matrix $\tilde{A}$, wenn
  (i) ein neuer Messwert zusätzlich berücksichtigt wird, bzw.
  (ii) wenn ein vorhandener Messwert entfernt wird?

(b) Es liege bereits eine QR-Zerlegung von A, die mittels Givensrotation bestimmt wurde, vor. Bei der Givensrotation werden Matrizen G_{kl} mit

$$G_{kl} := \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccccccc} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& \bar{c} &&&& \bar{s} &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& -s &&&& c &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ -k \\ \\ \\ \\ -l \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} & & & \overset{|}{k} & & & & \overset{|}{l} & & & \end{array} & \end{array} \qquad \text{mit } |\ c\ |^2 + |\ s\ |^2 = 1 \quad \text{und} \quad c = \cos\theta, s = \sin\theta$$

auf die Matrix $\tilde{R}$ angewendet um die Einträge zu eliminieren, sodass $\tilde{R}$ am Ende wieder die gewünschte Form einer oberen Dreiecksmatrix besitzt. Wie lässt sich dann für die beiden Fälle aus (a) eine neue Zerlegung $\tilde{A} = \tilde{Q}\tilde{R}$ berechnen?

Schriftliche Abgabe der Hausübung in maximal Zweiergruppen am 24.05.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Ansprechpartner: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 10-11 h