Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Dr. Sarah Eberle

Tübingen, den 01.07.06.2016

12. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker, Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 20:
Es sei eine Funktion $T(h) = \tau_0 + \tau_1 h^p + \tau_2 h_2^p + \dots$ gegeben, die wir für diskrete Werte von h, nicht aber in $h = 0$ auswerten können (vgl. Trapezsumme, wo nur $h = \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ sinnvoll ist). Man sagt dann, dass der Fehler $E(h) = T(h) - T(0)$ eine asymptotische Entwicklung in h der Ordnung p hat. Diese Ordnung lässt sich durch Extrapolation erhöhen.

(a) Zu gegebenem $h > 0$ betrachten wir $T_1(h) = T(h)$ und $T_2(h) = T(\frac{h}{2})$. Rechnen Sie nach, dass das Neville-Schema den extrapolierten Wert $T_{12}(h) := \dfrac{2^p T(\frac{h}{2}) - T(h)}{2^p - 1}$ als Approximation für $T(0)$ liefert und bestimmen Sie die Ordnung der asymptotischen Entwicklung des Fehlers $E_{12}(h) = T_{12}(h) - T(0)$.

(b) Es sei f in t beliebig oft differenzierbar und $T(h) = \dfrac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} \approx f'(t)$. Welche Ordnung hat die asymptotische Entwicklung des Fehlers $E(h) = T(h) - f'(t)$?

Besprechung in der Übung am 11.07.2016.

Bitte wenden!

Programmieraufgabe

Aufgabe P4: (4 Punkte)
Schreiben Sie Funktionen, die für eine gegebene Funktion f, Grenzen a, b und eine vorgegebene Anzahl N von Teilintervallen gleicher Länge das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

mit der Rechtecksregel, der Trapezregel und der Simpsonregel näherungsweise berechnen.
Als Eingabeparameter sollen also a, b und die Anzahl der Teilintervalle N übergeben werden.
Testen Sie diese Funktionen am Integral

$$\int_0^3 \cos x e^{\sin x} dx.$$

Schreiben Sie dazu eine weitere Funktion zur Auswertung von $f(x) = \cos x e^{\sin x}$ und ein Hauptprogramm, welches die Funktionen für $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64$ Teilintervalle gleicher Länge aufruft.

Was ist der exakte Wert des Integrals? Untersuchen Sie für die genannten Verfahren die Abhängigkeit des Fehlers von $h = 3/N$.

Tragen Sie den Logarithmus des Fehlers als Funktion von $\log(h)$ auf. Es ergeben sich die Fehlerkurven der Verfahren annähernd als Geraden der Steigungen 1,2 und 4. Warum?

Abgabe der Programmieraufgabe in maximal Zweiergruppen bis zum 19.07.2016 um 16 h s.t. per E-Mail an `eberle@na.uni-tuebingen.de`.

Bitte beachten Sie die Informationen zur Abgabe auf der Homepage.

Ansprechpartner: Sarah Eberle,
`eberle@na.uni-tuebingen.de`, Sprechstunde: Donnerstag 10-11 h