

11. Übungsblatt zur Numerik für Informatiker, Bio- und Medieninformatiker

Aufgabe 18: (Quadraturformel)

Bestimmen Sie die Quadraturformel (d.h. deren Gewichte)

$$I(f) = b_1 f(0) + b_2 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + b_3 f(\pi),$$

so dass durch $I(f)$ alle Funktionen des Raumes G , der von der Basis $\{1, \sin(x), \cos\left(\frac{x}{2}\right)\}$ aufgespannt wird, auf $[0, \pi]$ exakt integriert werden (mit Begründung!).

Aufgabe 19: (Gauß-Quadratur)

Berechnen Sie näherungsweise die Integrale

(a) $\int_{-1}^1 3x^3 dx,$

(b) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

mit der Gauß-Quadratur $I(f)$.

Besprechung in der Übung am 04.07.2016.

Bitte wenden!

Aufgaben Hausübung Blatt 4

Aufgabe 10*: (4 Punkte)

Es seien die Knoten $c_1 = 0$ und $c_3 = 1$ einer Quadraturformel für $s = 3$ vorgegeben.

- (a) Bestimmen Sie den Knoten c_2 sowie die Gewichte b_1 , b_2 und b_3 so, dass die Ordnung der Quadraturformel maximal wird.
- (b) Wie groß ist die Ordnung Ihrer Quadraturformel?

Aufgabe 11*: (4 Punkte)

Zeigen Sie die folgenden Fehlerabschätzungen für die Trapez- und die Mittelpunktsregel:

$$(a) \left| \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx}_{=I(f)} - \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_0 + h)) \right| \leq \frac{h^3}{12} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|$$

$$(b) \left| \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx}_{=I(f)} - hf(x_0 + h/2) \right| \leq \frac{h^3}{24} \max_{x \in [x_0, x_0+h]} |f''(x)|$$

Hinweis: Beispielsweise für die Trapezregel: Interpretieren Sie $\frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_0 + h)) = I(\hat{f})$ als Integral über eine f interpolierende Funktion \hat{f} und untersuchen Sie die Restglieddarstellung der Polynominterpolation.

Aufgabe 12*: (4 Punkte)

- (a) Geben Sie diejenigen Gewichte b_1 und b_2 an, für die die Quadraturformel

$$I(f) = b_1 f(-1) + b_2 f(1)$$

das Integral

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

für alle Polynome $f = p \in P_1$ vom Grad ≤ 1 exakt berechnet.

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung der Integrale die Substitution $x = \sin y$.

- (b) Ist die in (a) gefundene Quadraturformel auch exakt für alle Polynome vom Grad 2?

Schriftliche Abgabe der Hausübung in maximal Zweiergruppen am 05.07.2016 zu Beginn der Vorlesung.

Ansprechpartner: Sarah Eberle,
eberle@na.uni-tuebingen.de, Sprechstunde: Donnerstag 10-11 h