Aufgabe 1:
Bestimmen Sie durch Gauß-Elimination die Cholesky-Zerlegung $\bar{L}\bar{L}^T$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie anschließend das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$b = \begin{pmatrix} 10 \\ 36 \\ 71 \end{pmatrix}$$

durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Funktion $f(x) = 2x - e^{-x}$.

(i) Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle x^* im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$F_1(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$
$$F_2(x) = -\ln(2x)$$

Iterationsverfahren zur Berechnung von x^* bilden, d.h. die Fixpunkte von F_i mit den Nullstellen von f übereinstimmen.
Welche der Funktionen sollte bei einer Fixpunktiteration

$$x_{k+1} = F_i(x_k)$$

verwendet werden?

(iii) Formulieren Sie das Newton-Verfahren für die Gleichung $f(x) = 0$.

Aufgabe 3:
Gegeben seien die Stützpunkte

f_i	8	3	4	8
x_i	-1	0	1	3

für $i = 0, 1, 2, 3$.

(i) Berechnen Sie mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch die Stützpunkte.

(ii) Bestimmen Sie die Newton-Darstellung des Interpolationspolynoms, indem Sie die dividierten Differenzen berechnen.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie bei äquidistanten Stützstellen x_0, x_1, x_2, x_3 die Gewichte b_i der Quadraturformel

$$\sum_{i=0}^{2} b_i f(x_i) = \int_{x_2}^{x_3} p(x)dx \;\approx\; \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx,$$

die durch Integration des Polynoms $p(x)$ entsteht, wobei $p(x)$ die Funktion f in x_0, x_1, x_2 interpoliert.
Tipp: Begründen Sie zunächst, dass ohne Einschränkung $x_2 = 0, x_3 = 1$ angenommen weden kann.

Aufgabe 5:
Eine mögliche Verallgemeinerung des expliziten Euler-Verfahrens bilden die Adams-Bashforth Verfahren, z.B.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\Big\{23f(t_n, y_n) - 16f(t_n - h, y_{n-1}) + 5f(t_n - 2h, y_{n-2})\Big\}. \tag{1}$$

Erläutern Sie kurz die Idee des expliziten Euler-Verfahrens und der Runge-Kutta Verfahren. In welchem Zusammenhang dazu steht Formel (1)?