Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 16.06.2008

5. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Bioinformatiker

Aufgabe 14:

Berechnen Sie näherungsweise das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x}$$

mit Hilfe der Simpson-Regel zu einer äquidistanten Unterteilung von $[0,1]$ in ein Teilintervall und in 5 Teilintervalle.

Aufgabe 15:

Mit wievielen Funktionsauswertungen kann das Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+2x} = 0.54930614\ldots$$

mit einem Fehler kleiner als 10^{-8} berechnet werden, wenn die summierte Simpson-Regel zu einer äquidistanten Unterteilung des Intervalls $[0,1]$ verwendet wird. Verwenden Sie dafür die in der Vorlesung angegebene Fehlerabschätzung.

Aufgabe 16:

Bestimmen Sie die Ableitung $\cosh'(0.6)$ durch Extrapolation unter Verwendung des zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\cosh(0.6+h) - \cosh(0.6-h)}{2h}$$

mit $h = 0.04$ und $h = 0.08$.

Aufgabe 17:

Welche der Indexfolgen

$$\text{(i)} \quad n_i = 2i-1, \qquad \text{(ii)} \quad n_i = 3^i, \qquad \text{(iii)} \quad n_i = i^2$$

für Schrittweiten $h_i = h/n_i$ $(i \in \mathbb{N})$ ist zulässig für die Extrapolation zum Limes?

Bitte wenden

Programmieraufgabe 7 :

Oft ist die exakte Berechnung von $I(f) := \int_a^b f(x)dx$ für eine gegebene stetige Funktion sehr kompliziert oder unmöglich. Zur näherungsweisen Berechnung kann z.B. die *summierte Trapezregel* verwendet werden, d.h.

$$I(f) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i) =: I_{\mathrm{Tr}}(\Delta_n, f)$$

für eine gegebene Unterteilung Δ_n: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$.
Schreiben Sie eine Funktion `trapezrule`, die die *summierte Trapezregel* für die äquidistanten Unterteilungen Δ_{n_k} ($x_j = a + jh_k$, $h_k = (b-a)/n_k$) für $n_k = 2^{k+1}$, $k = 1, \ldots, 4$, $n_5 = 100$ und die Funktionen $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \exp(-(2x)^2)$ berechnet.
Plotten Sie für $[a, b] = [0, 1]$ und $i = 2, 3$ den Quadraturfehler

$$err_{f_i}(h_k) = |I_{\mathrm{Tr}}(\Delta_{n_5}, f_i) - I_{\mathrm{Tr}}(\Delta_{n_k}, f_i)|$$

als Funktion in h_k ($k = 1, \ldots 4$) zusammen mit der Funktion f_2 im doppelt logarithmischen Maßstab in einen Graphen.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 30.06.2008.