Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Andreas Prohl

Tübingen, den 02.06.2008

4. Übungsblatt zur Numerischen Mathematik für Bioinformatiker

Aufgabe 11:

Gegeben sei die Wertetabelle:

$$\begin{array}{c|cccc} x_j & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_j & -5 & 0 & 1 & 4 \end{array}.$$

(1) Berechnen Sie mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades durch obige Punkte.

(2) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton-Tableaus die dividierten Differenzen und das Newton-Interpolationspolynom zu den oben gegebenen Daten.

Aufgabe 12:

Zu paarweise verschiedenen reellen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ sind die Lagrange-Polynome l_i gegeben durch $l_i(x) = \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$, $i = 0, \ldots, n$. Zeigen Sie:

(1) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(x) \equiv 1$,

(2) $\sum\limits_{i=0}^{n} l_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0, \\ 0 & \text{für } 1 \leq j \leq n, \\ (-1)^n \prod_{i=0}^{n} x_i & \text{für } j = n+1. \end{cases}$

Aufgabe 13:

Eine Funktion $s_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *kubischer Spline* bzgl. einer Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, wenn gilt (vergleiche Rannacher-Skript):

(1) $s_n \in C^2([a, b])$;

(2) $s_n|_{[xi-1, xi]}$ ist ein Polynom dritten Grades für $i = 1, \ldots, n$.

Gibt es reelle Koeffizienten a, b, c, d, so dass

$$s(x) = \begin{cases} (x+2)^3 + x, & x \in [-2, -1] \\ ax^3 + bx^2 + cx + d, & x \in [-1, 1] \\ (x-2)^3 + 1, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

eine kubische Splinefunktion bzgl. der Zerlegung $a = x_0 = -2 < x_1 = -1 < x_2 = 1 < x_3 = b = 2$ definiert?

Bitte wenden

Programmieraufgabe 7 :

(1) Schreiben Sie eine Prozedur `divdif`, die für gegebene Punkte (x_i, y_i), $i = 0, \dots, n$, die dividierten Differenzen $y[x_0, \dots, x_i]$ berechnet und zurückliefert.

(2) Schreiben Sie eine Funktion `polint`, die das Interpolationspolynom zu den gegebenen Punkten an der Stelle t auswertet.

(3) Testen Sie Ihr Programm anhand des Beispiels von Runge: $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1/(1+25x^2)$ soll in den Punkten $(x_i, f(x_i))$ interpoliert werden. Berechnen Sie dazu das Interpolationspolynom p_a zu den Knoten $x_i = -1 + i/5$ (äquidistante Knoten) und das Interpolationspolynom p_t zu den Knoten $x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right)$ (*Tschebyscheff-Knoten*). Tabellieren Sie auf dem Intervall $[-1, 1]$ die Werte der Funktion f und der beiden Interpolationspolynome p_a und p_t in 1001 äquidistanten Stützstellen. Stellen Sie die Werte graphisch dar.

(4) Erklären Sie das Ergebnis.

Besprechung der Aufgaben in den Übungen am 16.06.2008.