Universität Tübingen
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Christian Lubich

Tübingen, den 4. Juni 2016

11. Übungsblatt zu Numerik instationärer Differentialgleichungen

Übungsaufgabe 31. Eine komplexe Gauß-Funktion ist gegeben durch

$$\psi_0(x) = \exp(-a|x - \bar{q}|^2 + \mathrm{i}\bar{p}(x - \bar{q}) + c),$$

wobei $x \in \mathbb{R}$ ist, $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbb{R}^n$ reellen Parameternvektoren sind, $a \in \mathbb{C}$ ein komplexer Parameter ist mit $\Re(a) > 0$ und $c \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\|\psi_0\|_{L^2} = 1$ erfüllen muss.

Zeigen Sie: Sind die Anfangsdaten der freien Schrödinger-Gleichung $\mathrm{i}\partial\psi/\partial t = -\frac{1}{2m}\Delta\psi$ eine komplexe Gauß-Funktion, so bleibt die Lösung zu allen Zeiten eine komplexe Gauß-Funktion mit $\bar{p}(t) = \bar{p}(0), \bar{q}(t) = \bar{q}(0) + t\bar{p}(t)/m$ (d.h., Erwartungswerte von Ort und Impuls gemäß Newton).

Hinweis: Setzen Sie $\bar{p}(t), \bar{q}(t)$ wie angegeben an, und bestimmen Sie dann a und c aus gewöhnlichen Differentialgleichungen, die Sie aus der Schrödinger-Gleichung herleiten.

Übungsaufgabe 32. In der Vorlesung haben Sie für das Strang Splitting die folgende a priori Abschätzung gezeigt: Sei $\psi(t)$ die Lösung der Schrödinger Gleichung mit Hamilton Operator $H = T + V$ zum Anfangswert ψ_0 und sei $V(x)$ hinreichend regulär. Dann existiert ein $\tau_0 > 0$ und ein $c > 0$, so dass für alle $\tau < \tau_0$ mit $t_n = n\tau$ für die n-te Iterierte ψ_n des Strang Splitting gilt

$$\|\psi_n - \psi(t_n)\|_{L^2} \leq c t_n \tau^2 \max_{0 \leq t \leq t_n} \|\psi(t_n)\|_{L^2}.$$

Formulieren Sie und beweisen Sie ein a priori Abschätzung für das Lie Trotter Splitting.

Besprechung in den Übungen am 13. Juli 2016.